Álgebra Linear e Geometria Analítica I

1º Teste

26 de Março de 2004 Duração: 30m

1. Calcule o produto:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Resolução: $\left[\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 4+4+1 & -4+2+2 & 2-4+2 \\ -4+2+2 & 4+1+4 & -2-2+4 \\ 2-4+2 & -2-2+4 & 1+4+4 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{smallmatrix}\right].$

---

2. Usando o método de eliminação de Gauss, e indicando os pivots utilizados, resolva o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x+2y+z=1 \\ -2x+y+2z=3 \\ x-2y+2z=5 \end{cases}$$

Resolução: $\begin{cases} 2x+2y+z &= 1 \\ -2x+y+2z &= 3 \\ x-2y+2z &= 5 \end{cases} \overset{\substack{L_2\mapsto L_2+L_1 \\ L_3\mapsto L_3-\frac{1}{2}L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2x+2y+z &= 1 \\ 3y+3z &= 4 \\ -3y+\frac{3}{2}z &= \frac{9}{2} \end{cases} \overset{L_3\mapsto L_3+L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \mathbf{2}x+2y+z &= 1 \\ \mathbf{3}y+3z &= 4 \\ \boldsymbol{\frac{9}{2}}z &= \frac{17}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ y = -\frac{5}{9} \\ z = \frac{17}{9} \end{cases}$ Pivots (assinalados a negrito): $2, 3, \frac{9}{2}$.

---

3. Indique, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa.

(a) Existe uma matriz A tal que $A\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) Um sistema linear com três equações e quatro incógnitas é sempre indeterminado.

(c) Não existe nenhuma matriz real A quadrada de ordem n tal que $A^2 = -I_n$.

Resolução:

(a) Falsa. Seja $\left[\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right]$, com $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ uma matriz real qualquer do tipo 2×2. Então, temos $\left[\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 2x+2y & 2x+2y \\ 2z+2w & 2z+2w \end{smallmatrix}\right] \neq \left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$, uma vez que $1 \neq 3$.

(b) Falsa. O sistema pode ser impossível. Considere-se o seguinte sistema (de três equações e quatro incógnitas): $\begin{cases} x+y+z+w &= 0 \\ x+y+z+w &= 1 \\ x+y+z+w &=2 \end{cases}$.

(c) Falsa. Para $n = 2$ considere-se a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ (matriz quadrada sobre o corpo dos reais). Tem-se então: $A^2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$. Contudo é verdadeira para n ímpar. Se n é ímpar então $\det(-I_n) = -1$. Por outro lado, $\det A^2 = (\det A)^2 \geq 0$, logo não existe A tal que $A^2 = -I_n$.

[Cotações: 20 + 35 + 45.]

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

2º Teste

5 de Maio de 2004 Duração: 30m

1. Considere a seguinte matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

   1. Determine a decomposição $A = LDL^T$.
   2. Use a alínea anterior para calcular $\det(A)$.

Resolução: Em primeiro lugar usamos eliminação de Gauss para obter U que, uma vez que A é simétrica, coincide com L^T.

$$\begin{bmatrix} 1&1&1&1 \\ 1&2&2&2 \\ 1&2&3&3 \\ 1&2&3&4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 \mapsto L_3 - L_1 \\ L_4 \mapsto L_4 - L_1}]{L_2 \mapsto L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1&1&1&1 \\ 0&1&1&1 \\ 0&1&2&2 \\ 0&1&2&3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 \mapsto L_4 - L_2]{L_3 \mapsto L_3 - L_2} \begin{bmatrix} 1&1&1&1 \\ 0&1&1&1 \\ 0&0&1&1 \\ 0&0&1&2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 \mapsto L_4 - L_3} \begin{bmatrix} 1&1&1&1 \\ 0&1&1&1 \\ 0&0&1&1 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}.$$

Assim, a resposta à alínea (a) é $A = \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 1&1&0&0 \\ 1&1&1&0 \\ 1&1&1&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&1&1&1 \\ 0&1&1&1 \\ 0&0&1&1 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$. Usando esta factorização, $\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$, que é a resposta a (b).

---

2. Considere o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vectores $(0,1,0,1)$, $(0,2,0,-2)$, $(0,4,0,0)$, $(-1,1,1,1)$ e $(1,0,-1,0)$. Indique uma base deste subespaço tal que

   1. a base seja um subconjunto dos vectores dados;
   2. nenhum dos vectores dados lhe pertença.

Resolução: Considermos a matriz cujas colunas são os geradores dados. Então, sabemos que as colunas que tiverem pivots ao cabo do processo de eliminação de Gauss constituem uma base do espaço gerado por todas as colunas. Temos:

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&-1&1 \\ 1&2&4&1&0 \\ 0&0&0&1&-1 \\ 1&-2&0&1&0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1&2&4&1&0 \\ 0&0&0&-1&1 \\ 0&0&0&1&-1 \\ 1&-2&0&1&0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 \mapsto L_4 - L_1} \begin{bmatrix} 1&2&4&1&0 \\ 0&0&0&-1&1 \\ 0&0&0&1&-1 \\ 0&-4&-4&0&0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1&2&4&1&0 \\ 0&-4&-4&0&0 \\ 0&0&0&1&-1 \\ 0&0&0&1&-1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{L_4 \mapsto L_4 - L_3} \begin{bmatrix} 1&2&4&1&0 \\ 0&-4&-4&0&0 \\ 0&0&0&1&-1 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

Assim uma resposta à alínea (a) é $((0,1,0,1),(0,2,0,-2),(-1,1,1,1))$. Uma resposta à alínea (b) é $((0,10,0,10),(0,20,0,-20),(-10,10,10,10))$, que se obtém multiplicando cada vector da base anterior por 10.

Continua no verso.

3. Indique, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa.

1. Sejam x, y, z vectores de $\mathbb{R}^n$. Se $\{x, y\}$ e $\{x, z\}$ são conjuntos linearmente independentes então $\{x, y, z\}$ é linearmente independente.

2. Se as colunas de uma matriz quadrada de ordem n formam uma base de $\mathbb{R}^n$ então as linhas dessa matriz também formam uma base de $\mathbb{R}^n$.

3. Sendo u, v vectores de $\mathbb{R}^n$, tem-se $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2$.

Resolução:

1. Falso. Apresentemos um contra-exemplo. Os conjuntos $\{(1,0),(0,1)\}$ e $\{(1,0),(0,2)\}$ de vectores de $\mathbb{R}^2$ são linearmente independentes, contudo $\{(1,0),(0,1),(0,2)\}$ é linearmente dependente.

2. Verdadeiro. Se as colunas de uma matriz formam uma base de $\mathbb{R}^n$ então $\dim C(A) = n$. Mas $\dim C(A) = \operatorname{car}(A) = \dim R(A)$ logo $\dim R(A) = n$. Conclui-se que as linhas da matriz são linearmente independentes. Uma vez que estas linhas constituem n vectores de $\mathbb{R}^n$, em virtude de A ser uma matriz quadrada, elas formam, igualmente, uma base de $\mathbb{R}^n$.

3. Falso.
$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 &= \{u+v, u+v\} \\
&= \{u,u\} + 2\{u,v\} + \{v,v\} \\
&= \|u\|^2 + 2\{u,v\} + \|v\|^2 \\
&\leqslant \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2,
\end{aligned}$$
pela desigualdade de Cauchy–Schwarz. Sabemos que para que a igualdade seja estrita basta tomar u e v linearmente independentes.

[Cotações: 30 + 35 + 35.]