Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

(Licenciatura em Matemática)

1ª Frequência, 20/04/2005

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Sejam A e B duas matrizes quadradas satisfazendo $AB = 0$ e $BA = 0$. Mostre que

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad (A+B)^n = A^n + B^n.$$

2. Denote por A a matriz do sistema homogéneo:

$$\left\{\begin{array}{rrrrcl} 2x_1 & & +2x_3 & & = & 0 \\ -2x_1 & +x_2 & & +x_4 & = & 0 \\ & & 2x_3 & +4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & & & -3x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

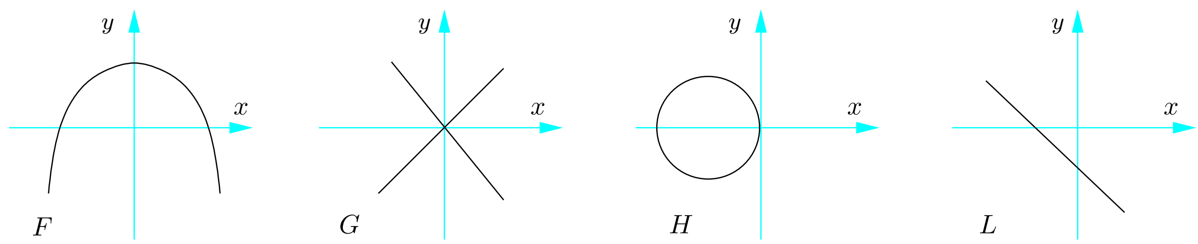
   (a) Determine a matriz em escada que se obtém aplicando a A o método de eliminação de Gauss.

   (b) Determine a decomposição LDU da matriz A.

   (c) Usando a alínea anterior, calcule o determinante de A.

   (d) Calcule o determinante da matriz adjunta de A.

3. Indique, justificando, quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ são subespaços.
(Em todos os casos, os eixos não são parte do conjunto.)



4. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^4$ dado por:

$$F = \left\{(x_1, 0, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_3 + x_4 = 0\right\}.$$

   (a) Diga, justificando, se F é ou não subespaço.

   (b) Mostre que $F = \mathscr{L}\{(1,0,1,0), (1,0,0,-1), (2,0,1,-1), (0,0,0,0)\}$.

5. Seja A uma matriz do tipo $m \times n$. Prove que

$$\dim N(A) = n - \operatorname{car}(A).$$

$\boxed{\text{Resolução}}$

1. Sejam A e B duas matrizes quadradas satisfazendo $AB = 0$ e $BA = 0$. Mostre que

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \quad (A+B)^n = A^n + B^n.$$

Solução: Como se trata de resultado que envolve a noção de potência de uma matriz, definida por recursão, a sua demonstração deve ser feita usando indução. Suponhamos que A e B são duas matrizes quadradas que satisfazem $AB = BA = 0$. O caso base verifica-se pois $(A+B)^1 = A + B = A^1 + B^1$. Mostremos que também se verifica o passo de indução. Suponhamos que para $k > 1$ se tem que $(A+B)^k = A^k + B^k$. Calculemos $(A+B)^{k+1}$. Por definição, $(A+B)^{k+1} = (A+B)^k(A+B)$. Por hipótese de indução: $(A+B)^k(A+B) = (A^k + B^k)(A+B)$. Usando a distributividade do produto de matrizes em relação à adição: $(A^k + B^k)(A+B) = A^kA + A^kB + B^kA + B^kB$. Usando, da definição de potência que, $A^k = A^{k-1}A$, $A^kA = A^{k+1}$ e $B^k = B^{k-1}B$, $B^kB = B^{k+1}$ temos:

$$A^kA + A^kB + B^kA + B^kB = A^{k+1} + (A^{k-1}A)B + (B^{k-1}B)A + B^{k+1} = A^{k+1} + A^{k-1}(AB) + B^{k-1}(BA) + B^{k+1}.$$

Finalmente usando a hipótese sobre AB e BA temos

$$A^{k+1} + A^{k-1}(AB) + B^{k-1}(BA) + B^{k+1} = A^{k+1} + A^{k-1}0 + B^{k-1}0 + B^{k+1} = A^{k+1} + B^{k+1}.$$

Demonstrámos que se verifica o passo de indução. Logo, podemos concluir que $(A+B)^n = A^n + B^n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

2. Denote por A a matriz do sistema homogéneo:

$$\begin{cases} 2x_1 & & +2x_3 & & = 0 \\ -2x_1 & +x_2 & & +x_4 & = 0 \\ & & 2x_3 & +4x_4 & = 0 \\ 2x_1 & & & -3x_4 & = 0 \end{cases}$$

(a) Determine a matriz em escada que se obtém aplicando a A o método de eliminação de Gauss.

Solução:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \mapsto L_2 + L_1 \\ L_4 \mapsto L_4 - L_1}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \underset{L_4 \mapsto L_4 + L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

(b) Determine a decomposição LDU da matriz A.

Solução: Da alínea anterior deduz-se que $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e que $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = DU$.

Logo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Usando a alínea anterior, calcule o determinante de A.

Solução: Consideremos a decomposição LDU de A calculada na alínea anterior. Temos

$$\det A = \det(L)\det(D)\det(U).$$

Cada uma das matrizes que aparece na factorização anteiror é uma matriz triangular. Como tal o seu determinante é igual ao produto dos elementos diagonais. Temos, pois, $\det A = 4$.

(d) Calcule o determinante da matriz adjunta de A.

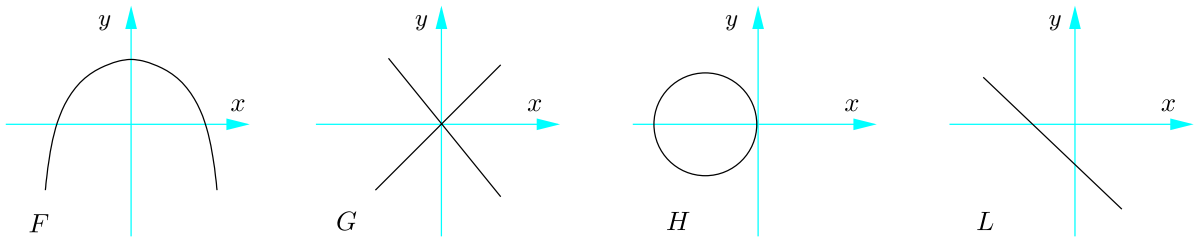
Solução: Comecemos por notar que se $\det A = 4$, a matriz A é invertível e o determinante da sua inversa é $\frac{1}{4}$. Para o cálculo do determinante da matriz adjunta basta usar a identidade

$$\det(A)A^{-1} = \tilde{A}^T.$$

De facto, daquela identidade conclui-se que $\det(\tilde{A}^T) = \det(\det(A)A^{-1})$, e como $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$ (para qualquer matriz quadrada do tipo $n \times n$) obtém-se:

$$\det(\tilde{A}^T) = \det(A)^4 \cdot \det(A^{-1}) = 4^3 = 64.$$

3. Indique, justificando, quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ são subespaços.
(Em todos os casos, os eixos não são parte do conjunto.)



Solução: Nenhum dos subconjuntos dados é subespaço. Sabemos, por um corolário dado na aula teórica, que um subespaço de $\mathbb{R}^n$ contém sempre o vector $(0, \ldots, 0)$. Assim podemos dizer que nem L nem F são subespaços, já que a nenhum deles pertence $(0, 0)$. Pelo terceiro axioma de subespaço, se um vector $(x_1, \ldots, x_n)$ pertence a um subespaço então a recta que une $(x_1, \ldots, x_n)$ à origem está contida no subespaço. Por esta razão H também não é subespaço. Finalmente, o conjunto G é a reunião de duas rectas e cada uma dessas rectas é um subespaço de $\mathbb{R}^2$. Sabemos que a reunião de dois subespaços de $\mathbb{R}^n$ só é subespaço quando um deles contiver o outro. Como tal não acontece, conclui-se de G também não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

4. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^4$ dado por:

$$F = \left\{(x_1, 0, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_3 + x_4 = 0\right\}.$$

(a) Diga, justificando, se F é ou não subespaço.

Solução: Temos (pelo menos) três formas de mostrar que F é subespaço. A primeira forma passa por verificar os 3 axiomas de espaço. É a mais rotineira mas requer menos conceitos teóricos. A segunda passa por mostrar que F é solução de um sistema de equações lineares. Finalmente, a terceira passa por exprimir F como o conjunto das combinações lineares de um conjunto de vectores de $\mathbb{R}^4$. De todos os processos de demonstrar que F é subespaço, o resultado do último será útil na restante alíneas deste problema.

<u>1º Processo:</u> Mostremos que se verificam os três axiomas de subespaço. Em primeiro lugar, verificamos que F é não-vazio. De facto, por exemplo, $(0, 0, 0, 0) \in F$, já que $0 - 0 + 0 = 0$. Verifiquemos que F é fechado para a adição. Sejam $(x_1, 0, x_3, x_4)$ e $(y_1, 0, y_3, y_4)$ elementos de F. Sabemos que $x_1 - x_3 + x_4 = 0$ e $y_1 - y_3 + y_4 = 0$. A soma destes dois vectores é $(x_1 + y_1, 0, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$ que

pertencerá a F se e só se $(x_1+y_1)-(x_3+y_3)+(x_4+y_4)=0$. Ora $(x_1+y_1)-(x_3+y_3)+(x_4+y_4)= = x_1+y_1-x_3-y_3+x_4+y_4=(x_1-x_3+x_4)+(y_1-y_3+y_4)=0+0=0$. Logo F é fechado para a adição. F também é fechado para a multiplicação escalar, pois se $\alpha\in\mathbb{R}$ e $(x_1,0,x_3,x_4)\in F$, então $x_1-x_3+x_4=0$ e logo $\alpha x_1-\alpha x_3+\alpha x_4=\alpha 0=0$ ou seja $\alpha(x_1,0,x_3,x_4)=(\alpha x_1,0,\alpha x_3,\alpha x_4)\in F$.

2º Processo: O conjunto $\big\{(x_1,0,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1-x_3+x_4=0\big\}$ é o conjunto das soluções do sistema homogéneo de equações lineares:

$$\begin{cases} x_1-x_3+x_4=0\\ x_2=0\end{cases}$$

Como sabemos que o conjunto das soluções de um sistema homogéneo é um subespaço, conclui-se que F é subespaço. (Nesta altura poder-se-ía calcular um sistema de geradores de F usando as técnicas de resolução de sistemas.)

3º Processo: Mostremos que F se pode escrever como o conjunto das combinações lineares de dois vectores. Temos:

$$F=\big\{(x_1,0,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1-x_3+x_4=0\big\}=$$
$$=\big\{(x_1,0,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1=x_3-x_4\big\}=\{(x_3-x_4,0,x_3,x_4)\mid x_3,x_4\in\mathbb{R}\}=$$
$$=\{(x_3,0,x_3,0)+(-x_4,0,0,x_4)\mid x_3,x_4\in\mathbb{R}\}=\{x_3(1,0,1,0)+x_4(-1,0,0,1)\mid x_3,x_4\in\mathbb{R}\}=$$
$$=\mathscr{L}\{(1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}\,.$$

Assim, como $\mathscr{L}\{(1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$ é subespaço, conclui-se que F é subespaço.

(b) Mostre que $F=\mathscr{L}\{(1,0,1,0),(1,0,0,-1),(2,0,1,-1),(0,0,0,0)\}$.

Solução: Designemos $(1,0,1,0)$ e $(-1,0,0,1)$ por v_1 e v_2 e $(1,0,1,0)$, $(1,0,0,-1)$, $(2,0,1,-1)$, $(0,0,0,0)$ por u_1,u_2,u_3 e u_4, respectivamente. Note que $v_1=u_1$. Da alínea anterior sabemos que $F=\mathscr{L}\{v_1,v_2\}$. Mostremos que $\mathscr{L}\{v_1,v_2\}\subset\mathscr{L}\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$. Basta ver que v_1 e v_2 são combinações lineares de u_1, u_2, u_3 e u_4 porque assim, qualquer combinação linear de v_1 e v_2 será também combinação linear de u_1, u_2. u_3 e u_4 (verifique!). De facto, tem-se $v_1=u_1$ e $v_2=-u_2$, logo, tanto v_1 como v_2 são (trivialmente) combinações lineares de u_1, u_2, u_3 e u_4. Mostremos agora a inclusão inversa, i.e., mostremos que $\mathscr{L}\{u_1,u_2,u_3,u_4\}\subset\mathscr{L}\{v_1,v_2\}$. Como na inclusão anterior, basta ver que cada um dos vectores u_1,u_2,u_3,u_4 é combinação linear de v_1 e v_2. Assim é pois $u_1=v_1$, $u_2=-v_2$, $u_3=v_1-v_2$ e $u_4=0v_1+0v_2$. Alternativamente, esta inclusão também se podia ter mostrado directamente, i.e., mostrando que cada um dos vectores u_1,u_2,u_3,u_4 pertence a F; e para tal basta mostrar que esses vectores cumprem a condição $x_1-x_3+x_4=0$.

5. Seja A uma matriz do tipo $m\times n$. Prove que $\dim N(A)=n-\mathrm{car}(A)$.

Solução: Ver página 74 do texto teórico.

FIM

Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

(Licenciatura em Matemática)

$2^{\underline{a}}$ Frequência, 1/06/2005

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Sejam α e β dois números reais não nulos. Considere os seguintes vectores de $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (\alpha, \beta, \alpha, \beta) \quad \text{e} \quad v_2 = (0, \beta, 0, \beta).$$

   (a) Mostre que v_1 e v_2 são linearmente independentes.

   (b) Estenda $\{v_1, v_2\}$ a uma base de $\mathbb{R}^4$.

2. Considere o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^5$:

$$F = \left\{(x, 0, y, 0, z) \in \mathbb{R}^5 \mid x + y + z = 0\right\}.$$

   (a) Mostre que F é subespaço de $\mathbb{R}^5$.

   (b) Calcule uma base de F e indique a dimensão deste subespaço.

   (c) Determine uma base ortogonal de F.

   (d) Calcule a projecção ortogonal de $(1, 1, 1, 1, 1)$ sobre F.

3. Considere a recta S de $\mathbb{R}^4$ que passa pelos pontos $(0, 1, 1, 1)$ e $(1, 1, 1, 1)$.

   (a) Escreva as equações paramétricas de S.

   (b) Determine a equação cartesiana do hiperplano perpendicular a S que passa pela origem.

4. Seja $Ax = b$ um sistema impossível, com A do tipo $m \times n$.

   (a) Que condição deve A satisfazer para que a solução no sentido dos mínimos quadrados deste sistema não seja única? Justifique.

   (b) Nesse caso (de não unicidade), mostre que o conjunto de tais soluções é um plano (variedade linear). Em que espaço? De que dimensão?

   (c) Mostre ainda que, no conjunto dessas soluções, existe uma que tem norma mínima.

   (d) Determine a solução especial referida em (c) para $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Resolução

1. Sejam α e β dois números reais não nulos. Considere os seguintes vectores de $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (\alpha, \beta, \alpha, \beta) \quad \text{e} \quad v_2 = (0, \beta, 0, \beta).$$

(a) Mostre que v_1 e v_2 são linearmente independentes.

Solução: Basta provar que a matriz $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & 0 & \beta \end{bmatrix}$ tem característica 2. Tal siginifica que o espaço das duas linhas têm dimensão dois e, sendo gerados por duas linhas, essas mesmas linhas têm de ser linearmente independentes. Para concluir-mos que A tem caractrística 2 para quaisquer números reais α e β, não nulos, basta encontrar um menor 2×2 não nulo. De facto o menor 2×2 que é determinante da submatriz de A nas colunas 1 e 2 é $\alpha\beta$ que é não nulo, pois α e β são ambos não nulos. Alternativamente, podemos mostrar facilmente que o espaço gerado por estes dois vectores é o espaço $\mathscr{L}(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)$ e de seguida demonstrar que este último tem dimensão 2. Ainda uma terceira alternativa passaria por empregar o citério de independência linear, usando para os coeficientes da combinação linear, notação diferente de α e β!

(b) Estenda $\{v_1, v_2\}$ a uma base de $\mathbb{R}^4$.

Solução: Mostremos que $\mathscr{L}\{v_1, v_2\} = \mathscr{L}\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$. Uma vez que

$$v_1 = \alpha(1, 0, 0, 1) + \beta(0, 1, 0, 1) \quad \text{e} \quad v_2 = \beta(0, 1, 0, 1)$$

a inclusão $\subset$ fica provada. Mostremos que também tem lugar a inclusão $\supset$. Basta inverter as combinações lineares anteriores. Temos:

$$(1, 0, 1, 0) = \frac{1}{\alpha}(v_2 - v_1) \quad \text{e} \quad (0, 1, 0, 1) = \frac{1}{\beta} v_2.$$

Assim, o terceiro vector deverá ser escolhido em $\mathbb{R}^4 \setminus \mathscr{L}\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$. Seja $v_3 = (1, 0, 0, 0)$. É fácil verificar que $v_3 \notin \mathscr{L}\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$ (este espaço é caracterizado pelos vectores que têm a primeira coordenada igual à terceira e a segunda coordenada igual à quarta). Finalmente, o quarto vector deve ser escolhi em $\mathbb{R}^4 \setminus \mathscr{L}\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 0)\}$. Como

$$\mathscr{L}\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 0)\} = \mathscr{L}\{(0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 0)\},$$

é fácil ver que se pode tomar para v_4, o vector $(0, 1, 0, 0)$. Assim a base de $\mathbb{R}^4$ procurada é:

$$\{(\alpha, \beta, \alpha, \beta), (0, \beta, 0, \beta), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}.$$

2. Considere o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^5$:

$$F = \left\{(x, 0, y, 0, z) \in \mathbb{R}^5 \mid x + y + z = 0\right\}.$$

(a) Mostre que F é subespaço de $\mathbb{R}^5$.

Solução: Consideremos o sistema de equações lineares seguinte: $\begin{cases} x \quad +y \quad +z = 0 \\ x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$

É um sistema com três equações nas incógnitas x, x_1, y, y_1, z. É imediato ver que $(x, x_1, y, y_1, z) \in F$ se e só se (x, x_1, y, y_1, z) é solução daquele sistema. Como o conjunto das soluções de um sistema de equações lineares homogéneo é um subespaço, conclui-se que F é subespaço.

(b) Calcule uma base de F e indique a dimensão deste subespaço.

Solução: Temos:

$$F = \left\{(x,0,y,0,z) \in \mathbb{R}^5 \mid x+y+z=0\right\} = \left\{(x,0,y,0,z) \in \mathbb{R}^5 \mid x = -y-z\right\} =$$
$$= \left\{(-y-z,0,y,0,z) \in \mathbb{R}^5 \mid y,z \in \mathbb{R}\right\} = \{y(-1,0,1,0,0) + z(-1,0,0,0,1) \mid y,z \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \mathscr{L}\left\{(-1,0,1,0,0),(-1,0,0,0,1)\right\}.$$

Assim, concluimos que $(-1,0,1,0,0),(-1,0,0,0,1)$ são geradores de F. Para além disso eles são linearmente independentes pois nenhum é múltiplo do outro. Por outras palavras

$$\{(-1,0,1,0,0),(-1,0,0,0,1)\}$$

é uma base de F.

(c) Determine uma base ortogonal de F.

Solução:

(d) Calcule a projecção ortogonal de $(1,1,1,1,1)$ sobre F. Solução:

3. Considere a recta S de $\mathbb{R}^4$ que passa pelos pontos $(0,1,1,1)$ e $(1,1,1,1)$.

(a) Escreva as equações paramétricas de S.

Solução:

(b) Determine a equação cartesiana do hiperplano perpendicular a S que passa pela origem.

Solução:

4. Seja $Ax=b$ um sistema impossível, com A do tipo $m \times n$.

(a) Que condição deve A satisfazer para que a solução no sentido dos mínimos quadrados deste sistema não seja única? Justifique.

Solução:

(b) Nesse caso (de não unicidade), mostre que o conjunto de tais soluções é um plano (variedade linear). Em que espaço? De que dimensão?

Solução:

(c) Mostre ainda que, no conjunto dessas soluções, existe uma que tem norma mínima.

Solução:

(d) Determine a solução especial referida em (c) para $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solução: