Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

(Licenciatura em Matemática)

Exame, 27/06/2005

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Considere a seguinte matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 14 & 20 \end{bmatrix}$.

   (a) Factorize A na forma LU, onde L é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais iguais a 1 e U é uma matriz triangular superior.

   (b) Calcule bases para o núcleo, o espaço das linhas e o espaço das colunas de A e indique as dimensões destes subespaços.

   (c) Determine para que valores dos parâmetros α e β o sistema $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha+2 \\ 4 \\ \beta+6 \end{bmatrix}$ é possível. Para esses valores, determine o conjunto-solução.

2. Sejam α e β parâmetros reais. Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} \beta+1 & 0 & \alpha-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha+1 & 0 & \beta-1 \end{bmatrix}$.

   (a) Indique para que valores de α e β a dimensão do espaço das colunas de B é menor que 3.

   (b) Calcule a adjunta da matriz B.

   (c) Considere $\alpha = 1$ e $\beta = 0$. Determine B^{-1}.

3. Considere o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^4$: $G = \left\{(x, x+y, y+z, z) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y, z \in \mathbb{R}\right\}$.

   (a) Mostre que G é subespaço de $\mathbb{R}^4$.

   (b) Calcule uma base de G e indique a sua dimensão.

   (c) Determine uma base ortogonal de G.

   (d) Calcule a projecção ortogonal de $(1, 1, 1, 1)$ sobre G.

4. Seja H o hiperplano de $\mathbb{R}^5$ que contém: $(1, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1, 0)$ e $(0, 0, 0, 0, 1)$.

   (a) Escreva equações paramétricas de H.

   (b) Calcule a distância de $(1, 1, 1, 1, 1)$ ao hiperplano H.

   (c) Determine equações paramétricas da recta perpendicular a H que contém $(1, 1, 1, 1, 1)$.

5. Seja A uma matriz do tipo $m \times n$ e seja b uma matriz do tipo $m \times 1$.

   (a) Prove que as soluções no sentido dos mínimos quadrados do sistema $Ax = b$ são exactamente as soluções (no sentido usual) do sistema $A^T Ax = A^T b$.

   (b) Porque é que o sistema $A^T Ax = A^T b$ é de certeza possível?

   (c) Usando o processo referido na alínea (a), determine a recta que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, aos pontos $(-1, 2)$, $(0, 0)$, $(1, -3)$ e $(2, -5)$. Represente graficamente estes pontos e essa recta.

Resolução

1. Considere a seguinte matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 14 & 20 \end{bmatrix}$.

   (a) Factorize A na forma LU, onde L é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais iguais a 1 e U é uma matriz triangular superior.

   Solução: Em primeiro lugar efectuamos operações nas linhas de A até obter uma matriz triangular superior, a que chamamos U:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 14 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \mapsto L_2 - 2L_1 \\ L_3 \mapsto L_3 - 3L_1 \\ L_4 \mapsto L_4 - 4L_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 \mapsto L_4 - 2L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

   (Note que U não está na forma reduzida, para tal seria necessário trocar as linhas 2 e 3. Não se fez troca de linhas já que é pedida uma factorização $A = LU$ e não $PA = LU$.) De acordo com as operações realizadas nas linhas de A a matriz L é dada por: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 14 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (b) Calcule bases para o núcleo, o espaço das linhas e o espaço das colunas de A e indique as dimensões destes subespaços.

   Solução: Uma base do espaço das linhas é dada pelo conjunto das linhas não nulas da matriz U, a saber $\{(1,2,3,4),(0,0,1,2)\}$. Uma base do espaço das colunas é dada pelo conjunto das colunas da matriz A cuja posição correspondente na matriz U contém um pivot, a saber $\{(1,2,3,4),(3,6,10,14)\}$. Para calcular $N(A)$ determinamos o conjunto-solução do sistema $U\mathbf{x} = 0$. Desta forma,

$$\begin{aligned} N(A) &= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + 3z + 4w = 0 \text{ e } z + 2w = 0\right\} = \\ &= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -2y - 3z - 4w \text{ e } z = -2w\right\} = \\ &= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -2y + 2w \text{ e } z = -2w\right\} = \\ &= \left\{(-2y + 2w, y, -2w, w) \in \mathbb{R}^4 \mid y, z \in \mathbb{R}\right\} = \\ &= \mathscr{L}\left\{(-2,1,0,0),(2,0,-2,1)\right\}. \end{aligned}$$

   Como nenhum dos vectores $(-2,1,0,0)$ e $(2,0,-2,1)$ é múltiplo do outro, estes vectores constituem uma base de $N(A)$. Finalmente, a dimensão destes subespaços é pois:

$$\dim C(A) = \dim R(A) = 2 \quad \text{e} \quad \dim N(A) = 2.$$

   (c) Determine para que valores dos parâmetros α e β o sistema $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha+2 \\ 4 \\ \beta+6 \end{bmatrix}$ é possível. Para esses valores, determine o conjunto-solução.

   Solução: Usemos o algorítmo de eliminação de Gauss na matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \alpha+2 \\ 3 & 6 & 10 & 14 & 4 \\ 4 & 8 & 14 & 20 & \beta+6 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 \mapsto L_2 - 2L_1 \\ L_3 \mapsto L_3 - 3L_1 \\ L_4 \mapsto L_4 - 4L_1}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & \beta+2 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 2 & 4 & \beta+2 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \mapsto L_4 - 2L_2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right].$$

Assim o sistema em questão é possível se e só se $\alpha = \beta = 0$. Neste caso o conjunto-solução é dado por

$$\begin{aligned}
\mathrm{C.S.} &= \big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x+2y+3z+4w = 1 \text{ e } z+2w = 1\big\} = \\
&= \big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 1-2y-3z-4w \text{ e } z = 1-2w\big\} = \\
&= \big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -2-2y+2w \text{ e } z = 1-2w\big\} = \\
&= \big\{(-2-2y+2w, y, 1-2w, w) \in \mathbb{R}^4 \mid y,w \in \mathbb{R}\big\} = \\
&= \big\{(-2,0,1,0) + u \in \mathbb{R}^4 \mid u \in N(A)\big\}.
\end{aligned}$$

2. Sejam α e β parâmetros reais. Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} \beta+1 & 0 & \alpha-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha+1 & 0 & \beta-1 \end{bmatrix}$.

   (a) Indique para que valores de α e β a dimensão do espaço das colunas de B é menor que 3.

   Solução: Uma vez que a dimensão do espaço das colunas de B é igual à dimensão do espaço das linhas e igual à característica desta matriz, basta determinar os valores dos parâmetros α e β para os quais B não tem característica 3. Por outras palavras, os valores para os quais B é singular. Como B é quadrada, tal acontece se e só se B não for invertível, e logo, se e só se o determinante de B for nulo. Calculemos pois o determinante de B:

$$\det \begin{bmatrix} \beta+1 & 0 & \alpha-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha+1 & 0 & \beta-1 \end{bmatrix} = (\beta+1)(\beta-1) + 0 + 0 - (\alpha+1)(\alpha-1) - 0 - 0 = \beta^2 - \alpha^2 = (\beta+\alpha)(\beta-\alpha).$$

   Conclui-se que os valores de α e β para os quais B tem dimensão do seu espaço das colunas menor que 3 são $\beta \neq \pm\alpha$.

   (b) Calcule a adjunta da matriz B.

   Solução: A adjunta de uma matriz obtém-se transpondo a matriz dos complementos algébricos, $\tilde{B}$.

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \beta-1 & 0 & -(\alpha+1) \\ 0 & \beta^2-\alpha^2 & 0 \\ -(\alpha-1) & 0 & \beta+1 \end{bmatrix} \text{ logo } \tilde{B}^T = \begin{bmatrix} \beta-1 & 0 & 1-\alpha \\ 0 & \beta^2-\alpha^2 & 0 \\ -\alpha-1 & 0 & \beta+1 \end{bmatrix}.$$

   (c) Considere $\alpha = 1$ e $\beta = 0$. Determine B^{-1}.

   Solução: Sabemos que quando uma matriz é invertível a sua inversa pode obter-se multiplicando a sua adjunta pelo inverso do seu determinante. Pelos cálculos das duas alíneas anteriores, para $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, $\det(B) = -1$ e logo $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

3. Considere o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^4$: $G = \big\{(x, x+y, y+z, z) \in \mathbb{R}^4 \mid x,y,z \in \mathbb{R}\big\}$.

   (a) Mostre que G é subespaço de $\mathbb{R}^4$.

   Solução: Temos

$$\begin{aligned}
G &= \big\{(x, x+y, y+z, z) \in \mathbb{R}^4 \mid x,y,z \in \mathbb{R}\big\} = \\
&= \big\{(x,x,0,0) + (0,y,y,0) + (0,0,z,z) \in \mathbb{R}^4 \mid x,y,z \in \mathbb{R}\big\} = \\
&= \big\{x(1,1,0,0) + y(0,1,1,0) + z(0,0,1,1) \in \mathbb{R}^4 \mid x,y,z \in \mathbb{R}\big\} = \\
&= \mathscr{L}\{(1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,1,1)\}.
\end{aligned}$$

   Em particular, conclui-se que G é o conjunto das combinações lineares de três vectores de $\mathbb{R}^4$ e logo é subespaço.

(b) Calcule uma base de G e indique a sua dimensão.

Solução: Da alínea anterior sabemos que o conjunto de vectores $\{(1,1,0,0),(0,1,1,1),(0,0,1,1)\}$ é um conjunto de geradores de G. Para concluir que estes vectores formam uma base basta verificar que são linearmente independentes. Para ver que assim é formamos uma matriz que têm como linhas esses mesmos vectores. Trata-se da matriz: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Esta matriz já se encontra na forma reduzida e a sua característica é pois 3. Quer isto dizer que o espaço das linhas desta matriz tem dimensão 3. Isto implica que as linhas são linearmente independentes. Assim $\{(1,1,0,0),(0,1,1,1),(0,0,1,1)\}$ é uma base de G e $\dim G = 3$.

(c) Determine uma base ortogonal de G.

Solução: Nada impede que, para começo do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, se reordenem os vectores da seguinte forma: $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,0,1,1)$ e $v_3 = (0,1,1,0)$. A vantagem é que assim $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ e logo para além de $u_1 = v_1$, temos também $u_2 = v_2$. Falta apenas calcular u_3. Este é dado por:

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 = (0,1,1,0) - \frac{1}{2}(1,1,0,0) - \frac{1}{2}(0,0,1,1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

(d) Calcule a projecção ortogonal de $(1,1,1,1)$ sobre G.

Solução: O vector $(1,1,1,1)$ pertence a G, como se pode constatar fazendo $x = z = 1$ e $y = 0$. Assim sendo, a sua projecção ortogonal sobre G coincide com ele próprio. I.e., $\text{pr}_G(1,1,1,1) = (1,1,1,1)$. [O mesmo se concluiria usando a base ortogonal calculada na alínea anterior e usando a fórmula da projecção.]

4. Seja H o hiperplano de $\mathbb{R}^5$ que contém: $(1,0,0,0,0)$, $(0,1,0,0,0)$, $(0,0,1,0,0)$, $(0,0,0,1,0)$ e $(0,0,0,0,1)$.

(a) Escreva equações paramétricas de H.

Solução: A equação vectorial de um hiperplano de $\mathbb{R}^5$ é da forma $\mathbf{x} = p + F$, onde p é qualquer ponto a ele pertencente e F é um subespaço de $\mathbb{R}^5$ de dimensão 4. Seja H o hiperplano que passa pelos pontos em questão. Sabemos que dados dois pontos p_1, p_2 de H o vector $p_1 - p_2$ pertence ao subespaço director. Tomemos pois a diferença de cada um dos primeiros quatro quatros pelo último dos pontos listados. Obtemos quatro vectores do espaço direcor, $(1,0,0,0,-1)$, $(0,1,0,0,-1)$, $(0,0,1,0,-1)$ e $(0,0,0,1,-1)$, que se verfica serem linearmente independentes. Assim, podemos concluir que estes vectores são geradores do espaço director de H. Uma equação vectorial de H é pois:

$$\mathbf{x} = (1,0,0,0,0) + \alpha(1,0,0,0,-1) + \beta(0,1,0,0,-1) + \gamma(0,0,1,0,-1) + \delta(0,0,0,1,-1), \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

E assim é possível determinar equações paramétricas de H:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \gamma & \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}. \\ x_4 = \delta \\ x_5 = -\alpha - \beta - \gamma - \delta \end{cases}$$

(b) Calcule a distância de $(1,1,1,1,1)$ ao hiperplano H.

Solução: Em primeiro lugar, determinemos a equação cartesiana do hiperplano H. É necessário encontrar um vector ortogonal ao espaço director. Denotemos por F o espaço director de H e calculemos $F^{\perp}$:

$$F^{\perp} = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid \langle (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5), u\rangle = 0 \quad \forall\, u \in F\right\} =$$
$$= \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = x_5, x_2 = x_5, x_3 = x_5 \text{ e } x_4 = x_5\right\} =$$
$$= \mathscr{L}\left\{(1,1,1,1,1)\right\}.$$

Em particular, o vector $(1,1,1,1,1)$ é ortogonal a F. Assim sendo, a equação cartesiana obtém-se tomando um ponto qualquer de H, digamos $(1,0,0,0,0)$, e fazendo:

$$\langle \mathbf{x} - (1,0,0,0,0), (1,1,1,1,1)\rangle = 0 \Longleftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1.$$

De seguida, para calcular a distância do ponto $(1,1,1,1)$ a H usamos a fórmula:

$$\frac{|\langle v-p, u\rangle|}{\|u\|} = \frac{|\langle (1,1,1,1,1) - (1,0,0,0,0), (1,1,1,1,1)\rangle|}{\|(1,1,1,1,1)\|} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

(c) Determine equações paramétricas da recta perpendicular a H que contém $(1,1,1,1,1)$.

Solução: Seja L a recta perpendicular a H que passa pelo ponto $(1,1,1,1,1)$. Se L é perpendicular a H então o seu espaço director estará contido no ortogonal de F (que na notação introduzida na alínea anterior é o espaço director de H). Pelo cálculo de $F^{\perp}$ feito na alínea anterior, conclui-se que $\mathscr{L}\left\{(1,1,1,1,1)\right\}$ é o espaço director de L. Uma equação vectorial de F é pois:

$$\mathbf{x} = (1,1,1,1,1) + \alpha(1,1,1,1,1) \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Desta facilmente se deduzem equações paramétricas:

$$\begin{cases} x_1 = 1+\alpha \\ x_2 = 1+\alpha \\ x_3 = 1+\alpha \\ x_4 = 1+\alpha \\ x_5 = 1+\alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

5. Seja A uma matriz do tipo $m \times n$ e seja b uma matriz do tipo $m \times 1$.

(a) Prove que as soluções no sentido dos mínimos quadrados do sistema $Ax = b$ são exactamente as soluções (no sentido usual) do sistema $A^T Ax = A^T b$.

Solução: V. texto teórico, página 95.

(b) Porque é que o sistema $A^T Ax = A^T b$ é de certeza possível?

Solução: O sistema $A^T Ax = A^T b$, pelo resultado da alínea anterior é equivalente ao sistema $Ax = c$, onde c denota a projecção ortogonal de b sobre o espaço das colunas de A, que é sempre possível pois c pertence a $C(A)$. Alternativamente, sabemos que $A^T Ax = A^T b$ é possível se e só se $A^T b$ pertence ao espaço das colunas de $A^T A$. Verifiquemos, directamente, que tal acontece. Denotemos por d a projecção ortogonal de $A^T b$ sobre $C(A^T A)$. Queremos mostrar que $d = A^T b$ ou seja que $d - A^T b = 0$. Por definição, *a priori*, apenas sabemos que $d - A^T b$ é orotognal a $C(A^T A)$. Tal significa que

$$\left\langle d - A^T b, A^T Ay\right\rangle = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Passando à notação matricial, obtém-se:

$$(d - A^T b)^T A^T A y = 0, \forall y \in \mathbb{R}^n \quad \Longleftrightarrow \quad \left\langle A^T A(d - A^T b), y \right\rangle = 0, \forall y \in \mathbb{R}^n;$$

o que implica que $(d - A^T b)^T A^T A = 0$. Multiplicando à direita por $(d - A^T b)$ obtém-se:

$$(d - A^T b)^T A^T A(d - A^T b) = 0 \Longleftrightarrow \left\| A(d - A^T b) \right\|^2 = 0 \Longleftrightarrow A(d - A^T b) = 0.$$

Como o sistema $A^T A x = d$ é seguramente possível, existe x_0 tal que $A^T A x_o = d$. Substitua-se por d por esta expressão na equação anterior:

$$A(d - A^T b) = 0 \Longrightarrow A(A^T A x_0 - A^T b) = 0 \Longleftrightarrow A A^T (A x_0 - b) = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (A x_0 - b)^T A A^T (A x_0 - b) = 0 \Longleftrightarrow \left\| A^T (A x_0 - b) \right\|^2 = 0 \Longleftrightarrow A^T A x_0 - A^T b = 0.$$

Substituindo de novo $A^T A x_0 = d$ obtém-se, finalmente, $d - A^T b = 0$.

(c) Usando o processo referido na alínea (a), determine a recta que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, aos pontos $(-1, 2)$, $(0, 0)$, $(1, -3)$ e $(2, -5)$. Represente graficamente estes pontos e essa recta.

Solução: Procuramos uma solução no sentido dos mínimos quadrados para o problema de encontrar uma recta $y = mx + c$ que melhor se ajuste aos pontos $(-1, 2)$, $(0, 0)$, $(1, -3)$ e $(2, -5)$. Cada um destes pontos impõe uma condição sobre m e c. São elas:

$$\begin{cases} 2 &= -m + c \\ 0 &= 0 + c \\ -3 &= m + c \\ -5 &= 2m + c \end{cases}$$

Somos levados ao sistema $Ax = b$ com $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$. Calculando $A^T A$ e $A^T b$ obtém-se: $A^T A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $A^T b = \begin{bmatrix} -15 \\ -6 \end{bmatrix}$. Usemos o método de eliminação de Gauss na matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & -15 \\ 2 & 4 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -6 \\ 6 & 2 & -15 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \mapsto L_2 - 3L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -6 \\ 0 & -10 & 3 \end{array}\right].$$

Desta forma obtém-se $c = -\frac{3}{10}$ e $m = \frac{-6+4\frac{3}{10}}{2} = -\frac{12}{5}$.

$\boxed{\text{FIM}}$

Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

(Licenciatura em Matemática)

Exame de recurso, 18/07/2005

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Considere a seguinte matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine a decomposição $A = LDU$.

   (b) Determine uma base e indique a dimensão do espaço das linhas.

   (c) Mostre que $\{(1,0,1,0),(0,1,0,1),(-1,0,1,0),(0,-1,0,1)\}$ é uma base do espaço das colunas.

   (d) Seja α um parâmetro real. Mediante a resolução de dois sistemas triangulares, determine a solução do sistema $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.

2. Sejam α, β, γ e δ parâmetros reais. Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & 1 & 2 \\ 2\alpha & \beta & \gamma+2 & 3 \\ 2\alpha & \beta & 2 & \delta+3 \end{bmatrix}$.

   (a) Indique para que valores de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, o determinante de B é nulo.

   (b) Considere $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 2$. Indique, justificando, o determinante da matriz adjunta de B.

3. Sejam A e B matrizes reais do tipo 2×3. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$G = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\}.$$

   (a) Mostre que G é subespaço.

   (b) Suponha que $\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}(B) = 1$. Mostre que $\dim G \geq 1$.

   (c) Suponha que $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$. Calcule uma base ortogonal de G.

   (d) Ainda com as hipóteses da alínea anterior, calcule a projecção ortogonal de $(1,1,1)$ sobre G.

4. Considere a recta L de $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem e por $(1,1,1)$.

   (a) Escreva equações paramétricas de L.

   (b) Escreva uma equação vectorial do hiperplano π que passa por $(1,1,1)$ e é perpendicular a L.

   (c) Calcule a distância da origem ao plano π considerado na alínea anterior.

5. (a) Determine a solução no sentido dos mínimos quadrados do sistema

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 + x_2 = 3 \\ 6x_1 + x_2 = 4 \end{cases}.$$

   (b) A temperatura média anual em certa região árctica foi de 0 graus em 1995, que consideraremos o "ano-zero". Foi de 1 grau em 1996, de 3 graus em 1998 e de 4 graus em 2001. Indique, justificando, um valor razoável (no sentido dos mínimos quadrados) para a temperatura média anual que se pode esperar para essa região em 2005.

1. Considere a seguinte matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Determine a decomposição $A = LDU$.

Solução: Em primeiro lugar reduzimos a matriz A, pelo método de eliminação de Gauss até obter uma matriz na forma escada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \mapsto L_2 - 2L_1 \\ L_3 \mapsto L_3 - 2L_1}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_3 \mapsto L_3 - 2L_2 \\ L_4 \mapsto L_4 - 2L_2}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \underset{L_4 \mapsto L_4 - 2L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A matriz assim obtida dá origem à matriz U multiplicando cada uma das suas linhas pelo pivot correspondente. De acordo com o que acabámos de dizer $U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. A matriz D é a matriz diagonal cujos elementos da diagonal são os pivots da eliminação de Gauss nas posições correspondentes. Temos, pois, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Finalmente, a matriz L é a matriz que se obtém a partir dos coeficientes usados na eliminação de Gauss. Desta forma, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Assim,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Determine uma base e indique a dimensão do espaço das linhas.

Solução: Sabemos que a matriz produzida pelo o método de eliminação de Gauss tem o mesmo espaço das linhas que a matriz inicial. (Tal deve-se ao facto de que apenas são feitas operações nas linhas e destas se restringirem às operações elementares e eventualemente troca de linhas.) Desta forma, o espaço das linhas de A coincide com o espaço das linhas da matriz em forma escada da alínea anterior. Sabemos que para estas matrizes o conjunto das suas linhas não nulas constitui uma base para o seu espaço das linhas. Assim, $\{(1,3,3,0), (0,-1,-3,-3), (0,0,1,3), (0,0,0,-1)\}$ é uma base para o espaço das linhas de A. Conclui-se que a dimensão deste espaço é 4.

(c) Mostre que $\{(1,0,1,0), (0,1,0,1), (-1,0,1,0), (0,-1,0,1)\}$ é uma base do espaço das colunas.

Solução: O espaço das colunas de A é um subespaço de $\mathbb{R}^4$. Para além disto, sabemos que a dimensão do espaço das colunas é igual à dimensão do espaço das linhas que, quer pela alínea anterior, quer contando o número de pivots, é 4. Assim sendo, o espaço das colunas de A (tal como acontece com o espaço das linhas de A) coincide com $\mathbb{R}^4$. Concluimos que basta mostrar que $\{(1,0,1,0), (0,1,0,1), (-1,0,1,0), (0,-1,0,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^4$, o que neste caso é equivalente a mostrar que estes vectores são linearemente independentes. De facto, o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é 4 e logo as suas linhas são necessariamente linearmente independentes.

(d) Seja α um parâmetro real. Mediante a resolução de dois sistemas triangulares, determine a solução do sistema $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Solução: Designemos por U' a matriz em escada da alínea (a) que se obteve a partir de A usando o método de eliminação de Gauss. Temos $LU' = A$, logo $A\mathbf{x} = c$ é equivalente aos dois sistemas triangulares: $Ld = c$ e $U'\mathbf{x} = d$. Tomemos $c = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, como é pedido, e resolvamos estes dois sistemas:

$$Ld = c \Longleftrightarrow \begin{cases} d_1 & = & \alpha \\ 2d_1 + d_2 & = & 1 \\ 2d_1 + 2d_2 + d_3 & = & 0 \\ \quad 2d_2 + 2d_3 + d_4 & = & -2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} d_1 & = & \alpha \\ d_2 & = & 1-2\alpha \\ d_3 & = & -2+2\alpha \\ d_4 & = & 0 \end{cases}$$

$$U\mathbf{x} = d \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 & = & \alpha \\ -x_2 - 3x_3 - 3x_4 & = & 1-2\alpha \\ x_3 + 3x_4 & = & -2+2\alpha \\ -x_4 & = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & -9+7\alpha \\ x_2 & = & 5-4\alpha \\ x_3 & = & -2+2\alpha \\ x_4 & = & 0 \end{cases}$$

2. Sejam α, β, γ e δ parâmetros reais. Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & 1 & 2 \\ 2\alpha & \beta & \gamma+2 & 3 \\ 2\alpha & \beta & 2 & \delta+3 \end{bmatrix}$.

   (a) Indique para que valores de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, o determinante de B é nulo.

   Solução: Para facilitar o cálculo do determinante podemos usar o método de eliminação de Gauss aliado às propriedades do determinante:

$$\det \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & 1 & 2 \\ 2\alpha & \beta & \gamma+2 & 3 \\ 2\alpha & \beta & 2 & \delta+3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & \beta & \gamma & 1 \\ 0 & \beta & 0 & \delta+1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{bmatrix} = \alpha\beta\gamma\delta.$$

   Assim, $\det(B) \neq 0 \Longleftrightarrow \alpha\beta\gamma\delta \neq 0$, ou seja, se e só se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$ e $\gamma \neq 0$ e $\delta \neq 0$.

   (b) Considere $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 2$. Indique, justificando, o determinante da matriz adjunta de B.

   Solução: Pela alínea anterior, $\det(B) = 2^4$. Logo $\det(B^{-1}) = \frac{1}{2^4}$. Sabemos que a matriz inversa de B se relaciona com a matriz adjunta de B da seguinte forma:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \tilde{B}^T.$$

   Logo $\det(B^{-1}) = \frac{\det \tilde{B}^T}{(\det B)^4}$, ou seja $\det(\tilde{B}^T) = \frac{(2^4)^4}{2^4} = 2^{12}$.

3. Sejam A e B matrizes reais do tipo 2×3. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$G = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid A \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right] = B \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right] \right\}.$$

   (a) Mostre que G é subespaço.

   Solução:

$$G = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid A \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right] = B \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right] \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (A-B) \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right] = 0 \right\} = N(A-B).$$

   Como o espaço-nulo de uma matriz é um subespaço conclui-se que G é subespaço.

   (b) Suponha que $\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}(B) = 1$. Mostre que $\dim G \geq 1$.

   Solução: Uma vez que $A - B$ é uma matriz do tipo 2×3 a sua característica é ≤ 2. Sendo que $G = N(A-B)$ temos $\dim G = \mathrm{nul}(A-B) = 3 - \mathrm{car}(A-B) \geq 3 - 2 = 1$. <u>Alternativamente</u>, a intersecção dos subespaços $N(A)$ e $N(B)$ está seguramente contida em G (verifique!) e como $3 \geq \dim(N(A) + N(B)) = \dim N(A) + \dim N(B) - \dim(N(A) \cap N(B))$, temos

$$\dim(N(A) \cap N(B)) \geq \dim N(A) + \dim N(B) - 3 = 3 - \mathrm{car}(A) + 3 - \mathrm{car}(B) - 3 = 1.$$

(c) Suponha que $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ e $B = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{smallmatrix}\right]$. Calcule uma base ortogonal de G.

Solução: Temos $A - B = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \end{smallmatrix}\right]$ e assim $G = N(A-B) = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y - 2z\big\}$. Como $\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y - 2z\big\} = \{(y,y,0) + (-2z,0,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\} = \mathscr{L}\{(1,1,0),(-2,0,1)\}$, os vectores $(1,1,0)$ e $(-2,0,1)$ são geradores de G. Para além disso nenhum é múltiplo do outro e assim sendo, eles são também linearmente independentes. Formam, portanto, uma base de G. Para se obter uma base ortogonal de G basta usar o processo de ortogonalização de Gramm–Schmidt. Seja $v_1 = (1,1,0)$ e $v_2 = (-2,0,1)$. Temos $u_1 = v_1$ e

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 = (-2,0,1) - \frac{-2}{2}(1,1,0) = (-1,1,1).$$

Assim os vectores $u_1 = (1,1,0)$ e $u_2 = (-1,1,1)$ formam uma base ortogonal de G.

(d) Ainda com as hipóteses da alínea anterior, calcule a projecção ortogonal de $(1,1,1)$ sobre G.

Solução: Se $\{u_1, u_2\}$ for uma base ortogonal de G então a projecção ortogonal de v sobre G é dada por

$$\mathrm{pr}_G(v) = \frac{\langle v, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 + \frac{\langle v, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2,$$

logo

$$\mathrm{pr}_G(1,1,1) = \frac{2}{2}(1,1,0) + \frac{1}{3}(-1,1,1) = (2/3, 4/3, 1).$$

4. Considere a recta L de $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem e por $(1,1,1)$.

(a) Escreva equações paramétricas de L.

Solução: Se L passa pela origem e por $(1,1,1)$ então L coincide com o subespaço gerado por $(1,1,1)$. (Justifique.) Assim uma equação vectorial é $\mathbf{x} = \alpha(1,1,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$; logo

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

são equações paramétricas de L

(b) Escreva uma equação vectorial do hiperplano π que passa por $(1,1,1)$ e é perpendicular a L.

Solução: Em primeiro lugar determinemos o ortogonal do espaço director de L:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{(1,1,1)\}^\perp &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (1,1,1),(x,y,z)\rangle = 0\big\} = \\ &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\big\} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y-z\big\} = \\ &= \big\{(-y-z,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y,z \in \mathbb{R}\big\} = \big\{(-y,y,0) + (-z,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y,z \in \mathbb{R}\big\} = \\ &= \mathscr{L}\{(-1,1,0),(-1,0,1)\} \end{aligned}$$

Assim π é o plano que passa por $(1,1,1)$ e tem por espaço director o espaço $\mathscr{L}\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$. Logo, uma equação vectorial é dada por:

$$\mathbf{x} = (1,1,1) + \alpha(-1,1,0) + \beta(-1,0,1), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(c) Calcule a distância da origem ao plano π considerado na alínea anterior.

Solução: A equação cartesiana de π é $\langle \mathbf{x} - (1,1,1), (1,1,1)\rangle = 0$, uma vez que π passa por $(1,1,1)$ e tem o vector $(1,1,1)$ como vector normal. Assim, pela fórmula para a distância de um ponto v a um hiperplano de equação cartesiana $\langle \mathbf{x} - p, u\rangle = 0$, temos:

$$\frac{|\langle v - p, u\rangle|}{\|u\|} = \frac{|\langle -(1,1,1),(1,1,1)\rangle|}{\|(1,1,1)\|} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Alternativamente, já que L é perpendicular a π e passa pela origem e por $(1,1,1)$, conclui-se que a distância da origem a π é dado pelo comprimento do segmento de recta entre $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$, e este é dado pela norma da diferença entre estes dois vectores: $\|(0,0,0)-(1,1,1)\| = \sqrt{3}$.

5. (a) Determine a solução no sentido dos mínimos quadrados do sistema

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 + x_2 = 3 \\ 6x_1 + x_2 = 4 \end{cases}.$$

Solução: Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Para determinar a solução no sentido dos mínimos quadrados do sistema $A\mathbf{x} = b$ podemos usar as equações normais: $A^T A\mathbf{x} = A^T b$. Temos $A^T A = \left[\begin{smallmatrix} 46 & 10 \\ 10 & 4 \end{smallmatrix}\right]$ e $A^T b = \left[\begin{smallmatrix} 34 \\ 8 \end{smallmatrix}\right]$. Para resolver este sistema reduz-se a matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 46 & 10 & 34 \\ 10 & 4 & 8 \end{array}\right] \overrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 10 & 4 & 8 \\ 46 & 10 & 34 \end{array}\right] \overrightarrow{L_2 \mapsto L_2 - \frac{23}{5} L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 10 & 4 & 8 \\ 0 & -42/5 & -14/5 \end{array}\right]$$

Assim, obtém-se $x_2 = \frac{14}{42} = \frac{1}{3}$ e $x_1 = \frac{8-4\cdot 1/3}{10} = \frac{2}{3}$.

(b) A temperatura média anual em certa região árctica foi de 0 graus em 1995, que consideraremos o "ano-zero". Foi de 1 grau em 1996, de 3 graus em 1998 e de 4 graus em 2001. Indique, justificando, um valor razoável (no sentido dos mínimos quadrados) para a temperatura média anual que se pode esperar para essa região em 2005.

Solução: Designemos 1995 pelo ano 0. Desta forma, 1996 será o ano 1, 1998 o ano 3 e 2001 o ano 6. Queremos pois aproximar o conjunto de pontos $\{(0,0),(1,1),(3,3),(6,4)\}$ por uma recta num referencial em que o eixo xx' represente os anos (com 1995 na origem) e o eixo yy' represente a temperatura média anual. O problema reduz-se, em primeiro lugar, a determinar m e c de forma a que a recta $y = mx + c$ aproxime, no sentido dos mínimos quadrados, aqueles quatro pontos; e seguidamente tomar a aproximação dada por esta recta para a temperatura anual média no ano 2005, que corresponde a $x = 10$. Substituindo em $y = mx + c$ as quatro condições impostas pelos quatro pontos anteriores, chegamos ao sistema da alínea anterior (com $x_1 = m$ e $x_2 = c$). Usando esta alínea, metade do problema fica resolvido. A equação da recta que melhor aproxima os pontos $\{(0,0),(1,1),(3,3),(6,4)\}$ é dada por

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}.$$

Assim substituindo $x = 10$, chegamos a $y = \frac{21}{3} = 7$, que é o valor esperado para a temperatura anual média no ano 2005 na região do ártico em questão.

$\boxed{\text{FIM}}$