Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Prova Suplementar, **26/07/2005**

1. O **traço** de uma matriz quadrada é a soma dos seus elementos diagonais (notação: tr). Sendo A m x n e B n x m matrizes quaisquer, prove que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

2. Sejam A n x n, B n x rn, C m x n e D m x m matrizes, com A invertível. Sendo

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

prove que $\det(M) = \det(A) \, . \det(D - CA^{-1}B)$.

(Sugestão: Eliminação "por blocos".)

3. Uma matriz n x n A diz-se **nilpotente** se existir uma potência de A (de expoente natural) que seja a matriz nula. Dada A nilpotente, seja k o menor natural tal que $A^k = \mathbf{0}$.

(a) Sendo $u \in R^n$, $u \notin N(A^{k-1})$, prove que os vectores $u, Au, A^2u, \ldots, A^{k-1}u$ são linearmente.independentes.

(b) Prove que $k - 1 \leq \operatorname{car}(A) < n$.

4. Sendo $x, y \in \mathbb{R}^n$, prove que x e y são ortogonais se e só se $||x|| \leq ||x + \alpha y||$ para todo o $\alpha \in R$.

5. Sendo F e G subespaços de $\mathbb{R}^n$, prove que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

6. (a) Sendo $u, v, w \in R^n$, quantos planos de dimensão **2** em $\mathbb{R}^n$ contêm u, v e w?

(b) Dados $u, v \in R^n$, descreva a reunião de todos os planos de dimensão **2** em $\mathbb{R}^n$ que contêm u e v.