DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Ano lectivo 2005/2006 – **Exame** – **26/06/2006** – **2h 30** m de duração

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Não é permitido qualquer tipo de consulta. Justifique brevemente as suas respostas e indique todos os cálculos que efectuou.

---

1. Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 2 & 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \text{ onde } \alpha \in \mathbb{R}.$$

   (a) Diga para que valores de α a matriz A é invertível.

   (b) Considere $\alpha = 1$.

      i. Determine uma decomposição $PA = LU$ onde P é uma matriz de permutação, L é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais iguais a 1 e U é uma matriz triangular superior.

      ii. Indique a característica de A e bases para o espaço nulo e espaço das colunas de A.

      iii. Sabendo que $A\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}7 & 10 & 7 & 12\end{bmatrix}^T$ determine a solução do sistema $Ax = \begin{bmatrix}7 & 10 & 7 & 12\end{bmatrix}^T$.

2. Para cada uma das seguintes afirmações diga, justificando, se é verdadeira ou falsa.

   (a) Se A é uma matriz do tipo 2 x 4, então o sistema $Ax = 0$ é possível e indeterminado.

   (b) Há uma matriz 2 x 2 invertível A tal que $A^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1 \\ 1 & 1\end{bmatrix}$.

   (c) Se A uma matriz quadrada de ordem 2 e $\det(A^{-1}) = 2$, então $\det(2A) = 2$.

   (d) Sendo v_1, v_2, v_3 vectores de $\mathbb{R}^n$, se $v_1 \in \mathscr{L}\{v_2, v_3\}$ então $v_2 \in \mathscr{L}\{v_1, v_3\}$.

3. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$:

$$F_a = \{(f+g, af+g, f+ag), f, g \in \mathbb{R}\}, \text{ onde } a \in \mathbb{R}.$$

   (a) Prove que F_a é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

   (b) Para cada $a \in \mathbb{R}$, indique a dimensão e uma base de F_a.

   (c) Determine os valores de a para os quais $(a, 1, 1)$ pertence a F_a.

   (d) Para que valores de a o vector $(4, -1, -1)$ é ortogonal a todos os elementos de F_a?

4. Seja $Ax = b$ um sistema impossível, com A matriz real m x n.

   (a) Quando é que a solução no sentido dos mínimos quadrados não é única? Justifique.

   (b) Nesse caso (de não unicidade), mostre que o conjunto de tais soluções é um plano. Em que espaço? E de que dimensão?

   (c) Mostre ainda que, no conjunto dessas soluções, existe uma que tem norma mínima.

   (d) Determine a solução especial referida em (c) para $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}^T$ e $b = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$

---

5. Considere as rectas R_1 e R_2 em $\mathbb{R}^3$ definidas pelas equações

$$\begin{cases} y = 2 \\ \frac{x-1}{4} = \frac{z-3}{-3} \end{cases} \quad \text{e} \quad (x,y,z) = (2,2,-4) + \lambda(3,3,4), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(a) Determine a posição relativa de R_1 e R_2.

(b) Determine uma equação cartesiana do plano $\mathbf{P}$ que contém a recta R_1 e é paralelo a R_2.

(c) Calcule a distância entre $\mathbf{P}$ e R_2.