DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Ano lectivo 2005/2006 – **1ª Frequência** – **23/03/2006** – 1h 15 m de duração

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Não é permitido qualquer tipo de consulta. Justifique brevemente as suas respostas e indique todos os cálculos que efectuou.

---

1. Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \text{ onde } \alpha \in \mathbb{R}.$$

   (a) Factorize A na forma LU, onde L é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais iguais a 1 e U é uma matriz em escada de linhas.

   (b) Discuta a característica de A em função do parâmetro α.

   (c) Para que valores de α a matriz A é invertível? Para $\alpha = 0$, calcule a inversa de A.

   (d) Determine os valores de α para os quais o sistema $Ax = b$ é impossível.

   (e) Usando a alínea (c), determine a solução de $Ax = b$ quando $\alpha = 0$.

2. Para cada uma das seguintes afirmações diga, justificando, se é verdadeira ou falsa.

   (a) Seja A uma matriz do tipo $n \times n$. Se D for uma matriz diagonal de ordem n, então $AD = DA$.

   (b) Se A for uma matriz do tipo 4×2, então o sistema $Ax = 0$ é possível e indeterminado.

   (c) Se a matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ é invertível, então a matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ também é invertível.

   (d) Seja A uma matriz quadrada de ordem 5, então $\det(-A) = -\det(A)$.

3. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n.

   Sem usar determinantes, prove que o produto AB é invertível se e só se A e B são ambas invertíveis.

---

1. Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \text{ onde } \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) **(2,5)** Factorize A na forma LU, onde L é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais iguais a 1 e U é uma matriz em escada de linhas.

Solução: Usando o método de eliminação de Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 - \alpha L_1 \\ L_3 - L_1}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha^2 \\ 0 & \alpha-1 & 1-\alpha \end{bmatrix} \underset{L_3 + L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha^2 \\ 0 & 0 & 2-\alpha-\alpha^2 \end{bmatrix}$$

A matriz obtida no final destas operações elementares é uma matriz em escada, mesmo quando $\alpha = 1$ (neste caso esta matriz é $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$). Portanto, a factorização LU de A é dada por

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha^2 \\ 0 & 0 & 2-\alpha-\alpha^2 \end{bmatrix}, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

(b) **(1,0)** Discuta a característica de A em função do parâmetro α.

Solução: A característica da matriz A é igual ao número de linhas não nulas de A. Portanto, car$(A) = 1$ se $\alpha = 1$ (neste caso, $U = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$), car$(A) = 2$ se $\alpha = -2$ (neste caso, $U = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$) e car$(A) = 3$ para todo o α diferente de 1 e de -2.

(c) **(2,0)** Para que valores de α a matriz A é invertível? Para $\alpha = 0$, calcule a inversa de A.

Solução: A matriz A é invertível se e só se car$(A) = 3$. Logo pela alínea anterior, A é invertível se α for diferente de 1 e de -2. Para $\alpha = 0$, aplique-se o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz A:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Portanto, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

(d) **(2,0)** Determine os valores de α para os quais o sistema $Ax = b$ é impossível.

Solução: Resolver $Ax = b$ equivale a resolver dois sistemas triangulares $Lc = b$ e $Ux = c$. A solução de $Lc = b$ é dada por

$$\begin{cases} c_1 = \alpha \\ \alpha c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 + c_3 = \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = \alpha \\ c_2 = 1 - \alpha^2 \\ c_3 = 1 - \alpha^2. \end{cases}$$

Determinem-se os valores de α para os quais o sistema $Ux = c$ é impossível, com $c = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1-\alpha^2 \\ 1-\alpha^2 \end{bmatrix}$.

Se $\alpha = 1$, $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, e o sistema é possível. Se $\alpha \neq 1$, o sistema $Ux = c$ é impossível se $2 - \alpha - \alpha^2 = 0$ e $1 - \alpha^2 \neq 0$. Mas $2 - \alpha - \alpha^2 = 0$ se e só se $\alpha = 1$ ou $\alpha = -2$. Para $\alpha = -2$, $1 - \alpha^2 \neq 0$, logo o sistema $Ax = b$ é impossível para este valor de α.

(e) **(1,0)** Usando a alínea (c), determine a solução de $Ax = b$ quando $\alpha = 0$.

Solução: Se $\alpha = 0$, o vector coluna b é a segunda coluna da matriz identidade, logo a solução (única, porque neste caso A é invertível) de $Ax = b$ é a segunda coluna de A^{-1} que já se calculou na alínea (c).

2. Para cada uma das seguintes afirmações diga, justificando, se é verdadeira ou falsa.

(a) **(1,5)** Seja A uma matriz do tipo $n \times n$. Se D for uma matriz diagonal de ordem n, então $AD = DA$.

Solução: Falsa. Contra-exemplo, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, tem-se $AD = \begin{bmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{bmatrix}$ e $DA = \begin{bmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{bmatrix}$.

(b) **(1,5)** Se A for uma matriz do tipo 4×2, então o sistema $Ax = 0$ é possível e indeterminado.

Solução: Falsa, se $\text{car}(A) = 2$, o sistema é possível determinado.

(c) **(2,0)** Se a matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ é invertível, então a matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ também é invertível.

Solução: Falsa. Contra-exemplo: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) **(1,5)** Seja A uma matriz quadrada de ordem 5, então $\det(-A) = -\det(A)$.

Solução: Verdadeira, $\det(A) = (-1)^5 \det(A) = -\det(A)$.

3. **(5,0)** Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n.

Sem usar determinantes, prove que o produto AB é invertível se e só se A e B são ambas invertíveis.

Solução: Ver apontamentos teóricos, páginas 15 e 35.