Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

1ª frequência, 28/3/2007

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 - 3x_5 & = & 3 \\ -x_1 - 4x_3 + 3x_4 - 5x_5 & = & -2 \end{cases}$$

(a) Escreva a matriz A do sistema.

(b) Factorize A na forma LU, onde L é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais iguais a 1 e U é uma matriz em escada.

(c) Diga qual é a característica de A.

(d) Resolva o sistema.

(e) Indique uma base e a dimensão de $N(A)$.

2. Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Prove que M é invertível.

(b) Determine a inversa de M por dois processos diferentes (um deles usando determinantes).

(c) Sendo $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$, resolva o sistema $Mx = b$ usando a inversa achada na alínea anterior.

3. Uma matriz quadrada A diz-se involutória se $A^2 = I$. Mostre que cada uma das seguintes propriedades de uma matriz quadrada é consequência das outras duas: simétrica, ortogonal, involutória.

4. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vectores de $\mathbb{R}^n$.

(a) Dado um subespaço F de $\mathbb{R}^n$, diga o que significa dizer-se que $v_1, v_2, \ldots, v_k$ geram F.

(b) Diga o que significa dizer-se que $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são linearmente independentes.

(c) Enuncie e demonstre um critério de independência linear que é útil na prática.

5. Considere n vectores em $\mathbb{R}^n$, e designe por A a matriz que os tem como colunas. Mostre que esses vectores são linearmente independentes se e só se a matriz A for invertível.