Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

Resolução da 1ª frequência, 28/3/2007

1. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 - 3x_5 & = & 3 \\ -x_1 - 4x_3 + 3x_4 - 5x_5 & = & -2 \end{cases}$$

(a) Escreva a matriz A do sistema.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 8 & -3 \\ -1 & 0 & -4 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

(b) Factorize A na forma LU, onde L é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais iguais a 1 e U é uma matriz em escada.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

(c) Diga qual é a característica de A.

A tem característica 3, porque tem três pivots: 1, 2 e 3.

(d) Resolva o sistema.

O sistema após a fase descendente do algoritmo de eliminação de Gauss é

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 1 \\ 2x_2 - x_3 + 4x_4 - 3x_5 & = & 2 \\ 3x_4 - 2x_5 & = & -3 \end{cases}$$

As incógnitas básicas são x_1, x_2 e x_4. Resolvendo o sistema de baixo para cima obtém-se

$$\begin{cases} x_1 & = & -1 - 4x_3 - 3x_5 \\ x_2 & = & 3 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{6}x_5 \\ x_4 & = & -1 + \frac{2}{3}x_5 \end{cases}$$

A solução geral do sistema é portanto

$$\begin{bmatrix} -1 - 4x_3 - 3x_5 \\ 3 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{6}x_5 \\ x_3 \\ -1 + \frac{2}{3}x_5 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad \text{com } x_3, x_5 \in \mathbb{R}.$$