(e) Indique uma base e a dimensão de $N(A)$.

Aproveitando o trabalho da alínea anterior, vemos que a solução geral do sistema $Ax = 0$ é

$$\begin{bmatrix} -4x_3 - 3x_5 \\ \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{6}x_5 \\ x_3 \\ \frac{2}{3}x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -4 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -3 \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{com } x_3, x_5 \in \mathbb{R}.$$

Isto significa que os vectores $\begin{bmatrix} -4 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -3 \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ geram $N(A)$. Como são linearmente independentes, constituem uma base de $N(A)$, que tem portanto dimensão 2.

2. Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Prove que M é invertível.

Calculando o determinante de M usando o Teorema de Laplace aplicado à segunda linha, obtemos

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Como $\det(M) \neq 0$, M é invertível.

(b) Determine a inversa de M por dois processos diferentes (um deles usando determinantes).

<u>Primeiro processo</u> – Designando por $\tilde{M}$ a matriz dos complementos algébricos de M, tem-se

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\tilde{M}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -19 & 1 & 12 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -19 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 12 & 2 \end{bmatrix}$$

<u>Segundo processo</u> – Apliquemos a M o algoritmo de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_3 - \frac{1}{2}L_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_3 + 6L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 6 & 1 \end{array}\right] \underset{L_1 - 6L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 4 & -36 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 6 & 1 \end{array}\right]$$

(e) Indique uma base e a dimensão de $N(A)$.

Aproveitando o trabalho da alínea anterior, vemos que a solução geral do sistema $Ax = 0$ é

$$\begin{bmatrix} -4x_3 - 3x_5 \\ \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{6}x_5 \\ x_3 \\ \frac{2}{3}x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -4 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -3 \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{com } x_3, x_5 \in \mathbb{R}.$$

Isto significa que os vectores $\begin{bmatrix} -4 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -3 \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ geram $N(A)$. Como são linearmente independentes, constituem uma base de $N(A)$, que tem portanto dimensão 2.

2. Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Prove que M é invertível.

Calculando o determinante de M usando o Teorema de Laplace aplicado à segunda linha, obtemos

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Como $\det(M) \neq 0$, M é invertível.

(b) Determine a inversa de M por dois processos diferentes (um deles usando determinantes).

Primeiro processo – Designando por $\tilde{M}$ a matriz dos complementos algébricos de M, tem-se

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \tilde{M}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -19 & 1 & 12 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -19 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 12 & 2 \end{bmatrix}$$

Segundo processo – Apliquemos a M o algoritmo de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_3 - \frac{1}{2}L_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_3 + 6L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 6 & 1 \end{array}\right] \underset{L_1 - 6L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 4 & -36 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 6 & 1 \end{array}\right]$$