$$\xrightarrow[L_1-2L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 4 & -38 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 6 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\frac{1}{2}L_1 \\ 2L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -19 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 12 & 2 \end{array}\right]$$

pelo que

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -19 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 12 & 2 \end{bmatrix}$$

(c) Sendo $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$, resolva o sistema $Mx = b$ usando a inversa achada na alínea anterior.

A solução única é $x = M^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 & -19 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 12 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 \\ -4 \\ -45 \end{bmatrix}$.

3. Uma matriz quadrada A diz-se involutória se $A^2 = I$. Mostre que cada uma das seguintes propriedades de uma matriz quadrada é consequência das outras duas: simétrica, ortogonal, involutória.

(Este é o exercício 48 da Folha 4.)

Note-se que $A^2 = I$ é equivalente a $A^{-1} = A$. Vejamos as três situações possíveis.

Se A for ortogonal e simétrica, então $A^{-1} = A^T$ e $A^T = A$, donde $A^{-1} = A$, ou seja A é involutória.

Se A for simétrica e involutória, então $A^T = A$ e $A^{-1} = A$, donde $A^{-1} = A^T$, isto é, A é ortogonal.

Se A for ortogonal e involutória, então $A^{-1} = A^T$ e $A^{-1} = A$, donde $A = A^T$, isto é, A é simétrica.

4. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vectores de $\mathbb{R}^n$.

(a) Dado um subespaço F de $\mathbb{R}^n$, diga o que significa dizer-se que $v_1, v_2, \ldots, v_k$ geram F.

$v_1, v_2, \ldots, v_k$ geram F se qualquer vector de F for uma combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

(b) Diga o que significa dizer-se que $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são linearmente independentes.

$v_1, v_2, \ldots, v_k$ são linearmente independentes se nenhum deles for uma combinação linear dos restantes $k-1$. (Se $k = 1$, v_1 é linearmente independente se for não nulo.)

(c) Enuncie e demonstre um critério de independência linear que é útil na prática.

Critério: $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são linearmente independentes se e só se for impossível escrever o vector nulo como combinação linear deles, excepto com os coeficientes todos nulos. (Para a demonstração, ver o texto teórico.)