5. Considere n vectores em $\mathbb{R}^n$, e designe por A a matriz que os tem como colunas. Mostre que esses vectores são linearmente independentes se e só se a matriz A for invertível.

Primeiro processo: ($\Rightarrow$) Suponhamos que os vectores são linearmente independentes. Consideremos a matriz A^T, que tem os vectores indicados como linhas, e apliquemos-lhe o algoritmo de eliminação. Se A^T não fosse invertível, isso significava que no fim da parte descendente do algoritmo pelo menos a última linha da matriz obtida era nula. Mas isso – dada a natureza das operações que fizemos com as linhas – só pode acontecer se uma delas for igual a uma combinação linear das restantes, o que contradiz a hipótese. Logo, A^T é invertível, e portanto A também.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponhamos A invertível. Se as colunas de A não fossem linearmente independentes, então pelo menos uma delas era igual a uma combinação linear das restantes. Subtraindo a essa coluna essa combinação linear das outras – o que não altera o determinante – ficaríamos com uma matriz com uma coluna nula, e portanto $\det(A) = 0$, o que contradiz a hipótese.

Segundo processo: Designemos os vectores por $v_1, v_2, \ldots, v_n$ e ponhamos $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Tem-se então

$$v_1, v_2, \ldots, v_n \text{ são linearmente independentes}$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = 0 \quad \text{só acontece com} \quad x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{o sistema } Ax = 0 \text{ é determinado}$$

$$\Updownarrow$$

$$A \text{ é invertível}$$