

1^o teste

5/3/2007

(a) Ache a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.

(b) Calcule $\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}^5$ usando a igualdade $\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$.

Este é o exercício 26 (da Folha 2).

Cotação: 1,0

(a) A inversa da matriz indicada é $\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$. Na altura em que o teste foi feito podia obter-se resolvendo um sistema com quatro equações e quatro incógnitas, sendo depois necessário verificar que se trata de facto da inversa da matriz dada (multiplicando-a do outro lado).

(b) Designando $\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}$ por A , $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ por S e $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ por D , a igualdade indicada é

$$A = SDS^{-1}.$$

Tem-se então

$$A^5 = (SDS^{-1})^5 = (SDS^{-1})(SDS^{-1})(SDS^{-1})(SDS^{-1})(SDS^{-1}) = SD^5S^{-1}$$

ou seja

$$A^5 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^5 & 0 \\ 0 & 3^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \cdot 2^5 + 15 \cdot 3^5 & 6 \cdot 2^5 - 6 \cdot 3^5 \\ -35 \cdot 2^5 + 35 \cdot 3^5 & 15 \cdot 2^5 - 14 \cdot 3^5 \end{bmatrix}.$$