Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

2ª frequência, 1/6/2007

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. (a) Determine uma base ortogonal para o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $(1,1,1)$ e $(0,3,6)$.

   (b) Calcule a projecção ortogonal do vector $(1,4,5)$ sobre o subespaço da alínea (a).

   (c) Usando o resultado da alínea anterior, determine a linha recta que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, aos pontos $(0,1)$, $(3,4)$, $(6,5)$. Represente graficamente.

2. (a) Dado um sistema impossível $Ax = b$, defina solução no sentido dos mínimos quadrados desse sistema.

   (b) Dado um sistema impossível $Ax = b$, explique porque é que as suas soluções no sentido dos mínimos quadrados são exactamente as soluções do sistema $A^T Ax = A^T b$.

3. Escreva uma equação cartesiana do plano que contém os pontos $(2,1,3)$, $(-3,-1,3)$ e $(4,2,3)$.

4. Dadas as rectas em $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x_1 = 3 + \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = -1 - 2\alpha \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

   (a) verifique que são concorrentes e determine o seu ponto de intersecção;

   (b) calcule o ângulo entre elas.

   Nota: O ângulo entre duas rectas $x = p + \alpha v$ e $x = q + \alpha w$ é o ângulo entre v e w (ou o suplementar desse).

5. O espaço das linhas de uma matriz A define-se como sendo o espaço das colunas de A^T. Prove que a dimensão do espaço das linhas de A é igual a $\operatorname{car}(A)$.