DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

2ª frequência, 1/6/2007

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. (a) Determine uma base ortogonal para o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $(1,1,1)$ e $(0,3,6)$.

   Uma tal base é $\{u_1, u_2\}$ com $u_1 = (1,1,1)$ e $u_2 = (0,3,6) - \dfrac{\langle u_1, (0,3,6)\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = (-3,0,3)$.

   (b) Calcule a projecção ortogonal do vector $(1,4,5)$ sobre o subespaço da alínea (a).

   A projecção é $\dfrac{\langle u_1, (1,4,5)\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \dfrac{\langle u_2, (1,4,5)\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{10}{3}, \dfrac{16}{3}\right)$.

   (c) Usando o resultado da alínea anterior, determine a linha recta que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, aos pontos $(0,1)$, $(3,4)$, $(6,5)$. Represente graficamente.

   Pela alínea anterior, a solução no sentido dos mínimos quadrados do sistema $\begin{cases} 0.d + h = 1 \\ 3.d + h = 4 \\ 6.d + h = 5 \end{cases}$ é a solução no sentido usual do sistema $\begin{cases} 0.d + h = \frac{4}{3} \\ 3.d + h = \frac{10}{3} \\ 6.d + h = \frac{16}{3} \end{cases}$, que é $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$. A recta procurada é portanto $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$.

(Este é o exercício 200 da Folha 14.)

2. (a) Dado um sistema impossível $Ax = b$, defina solução no sentido dos mínimos quadrados desse sistema.

   Seja A $m \times n$. Uma coluna $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ diz-se uma solução no sentido dos mínimos quadrados do sistema $Ax = b$ se $\|A\overline{x} - b\| = \min\{\|Ax - b\| : x \in \mathbb{R}^n\}$.

   (b) Dado um sistema impossível $Ax = b$, explique porque é que as suas soluções no sentido dos mínimos quadrados são exactamente as soluções do sistema $A^TAx = A^Tb$.

   Ver o texto teórico, página 95.