3. Escreva uma equação cartesiana do plano que contém os pontos $(2,1,3)$, $(-3,-1,3)$ e $(4,2,3)$.

O plano contém $(2,1,3)$ e é paralelo a $(2,1,3)-(4,2,3)$ e a $(2,1,3)-(-3,-1,3)$ ou seja é paralelo a $(-2,-1,0)$ e a $(5,2,0)$. É portanto perpendicular a $(-2,-1,0) \wedge (5,2,0) = (0,0,1)$.

Uma equação cartesiana será então $0.(x_1-2)+0.(x_2-1)+1.(x_3-3)=0$, ou seja $x_3 = 3$.

Um processo alternativo consiste em observar que os três pontos dados têm todos a terceira coordenada igual a 3, ou seja pertencem ao plano de equação $x_3 = 3$. Como existe um e um só plano que passa por três pontos não-colineares, o plano procurado tem equação $x_3 = 3$.

(Este é o exercício 235.d da Folha 16.)

4. Dadas as rectas em $\mathbb{R}^3$ $\begin{cases} x_1 = 3+\alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = -1-2\alpha \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$

(a) verifique que são concorrentes e determine o seu ponto de intersecção;

Resolvendo o sistema que define a segunda recta, obtemos equações paramétricas para essa recta: $\begin{cases} x_1 = -2-2\beta \\ x_2 = 4+\beta \\ x_3 = \beta \end{cases}$. Para procurar um ponto comum às duas rectas resolvemos o sistema $\begin{cases} 3+\alpha = -2-2\beta \\ \alpha = 4+\beta \\ -1-2\alpha = \beta \end{cases}$ que tem a solução $(\alpha,\beta) = (1,-3)$. Substituindo nas equações paramétricas das duas rectas, vemos que o ponto de intersecção delas é $(4,1,-3)$.

(b) calcule o ângulo entre elas. **Nota**: O ângulo entre duas rectas $x = p+\alpha v$ e $x = q + \alpha w$ é o ângulo entre v e w (ou o suplementar desse).

Usando $v = (1,1,-2)$ e $w = (-2,1,1)$, vemos que o ângulo é $\pi/3$.

(Este é o exercício 244 da Folha 16.)

5. O espaço das linhas de uma matriz A define-se como sendo o espaço das colunas de A^T. Prove que a dimensão do espaço das linhas de A é igual a $\mathrm{car}(A)$.

Primeiro processo: Ver o texto teórico, páginas 76-77.

Segundo processo: Suponhamos que A é $m \times n$. Tem-se $C(A^T) = N(A)^\perp$ (exercício 207, folha 14), donde $\dim C(A^T) = \dim N(A)^\perp = n - \dim N(A) = n - (n - \mathrm{car}(A)) = \mathrm{car}(A)$.