Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

2º teste 26/3/2007

Considere a matriz real

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & \mu & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \mu & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

com $\mu \in \mathbb{R}$. Determine os valores do parâmetro real μ para os quais a matriz C tem característica igual a quatro.

Este é o exercício 84 (da Folha 7).

Cotação: 1,0

Primeiro processo – Apliquemos a C o algoritmo de eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & \mu & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \mu & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2-2L_1 \\ L_3+L_1}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \mu & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \mu-1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \mu-1 & -1 \\ 0 & \mu & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_4-\mu L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \mu-1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-2\mu & 1-\mu \end{bmatrix} \underset{L_4+2L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \mu-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu-1 \end{bmatrix}$$

Então C tem quatro pivots se e só se $\mu \neq 1$ e $\mu \neq -1$. (Se não trocássemos as linhas 2 e 4, teríamos de supor $\mu \neq 0$ e depois discutir o caso $\mu = 0$ à parte. Ver-se-ia então que, no caso $\mu = 0$, C também tem característica 4.)

Segundo processo – Calculemos o determinante de C (teorema de Laplace, primeira linha):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & \mu & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \mu & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu & 0 & 1 \\ 0 & \mu & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & \mu & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mu^2 - \mu + 2\mu - (-1+\mu+2) = \mu^2 - 1$$

C tem característica 4 se e só se o seu determinante for não nulo, o que acontece se e só se $\mu \neq 1$ e $\mu \neq -1$.