Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

3º teste 30/4/2007

Seja $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ uma base ortonormada de $\mathbb{R}^n$. Seja $x \in \mathbb{R}^n$ um vector qualquer.

(a) Mostre que as coordenadas de x na base $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ são $\langle x, u_1\rangle, \langle x, u_2\rangle, ..., \langle x, u_n\rangle$. (Sugestão: escreva $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n$ e calcule $\langle x, u_j\rangle$.)

(b) Use a alínea anterior para concluir que, se x tiver norma 1, então as suas coordenadas na base $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ são os cosenos dos ângulos $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ de x com os vectores da base. Conclua que $\sum_{i=1}^{n} \cos^2\theta_i = 1$.

Este é o exercício 179 (da Folha 13).

Cotação: 1,0

(a) Conforme a sugestão, tomemos $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n$, isto é, designamos as coordenadas de x na base $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tem-se, usando as propriedades do produto interno,

$$\langle x, u_j\rangle = \langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n, u_j\rangle = \alpha_1\langle u_1, u_j\rangle + \alpha_2\langle u_2, u_j\rangle + ... + \alpha_n\langle u_n, u_j\rangle\,.$$

Como os vectores $u_1, u_2, ..., u_n$ são ortogonais dois a dois, todas as parcelas desta soma são iguais a 0 excepto a parcela j, que é igual a

$$\alpha_j\langle u_j, u_j\rangle = \alpha_j$$

porque $\|u_j\| = 1$.

Provámos assim que $\alpha_j = \langle x, u_j\rangle$, como pretendido.

(b) Para cada j, tem-se $\cos\theta_j = \dfrac{\langle x, u_j\rangle}{\|x\|.\|u_j\|}$. Como os vectores u_j são normados vem, se $\|x\| = 1$,

$$\cos\theta_j = \langle x, u_j\rangle = \alpha_j\,.$$

Além disso, por $u_1, u_2, ..., u_n$ serem ortonormados, tem-se

$$1 = \|x\| = \langle x, x\rangle = \langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n\rangle = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2$$

pelo que

$$\sum_{i=1}^{n} \cos^2\theta_i = 1\,.$$