Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

**Álgebra Linear e Geometria Analítica I**

Licenciatura em Matemática

4º teste 28/5/2007

Determine uma base para o complemento ortogonal do subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vectores $(1,-1,1,-1)$ e $(2,-1,-1,2)$ e a partir dela uma base ortogonal.

---

Este é o exercício 206 (da Folha 14), ligeiramente modificado para simplificar os cálculos.

Cotação: 1,0

Ponhamos $w_1 = (1,-1,1,-1), w_2 = (2,-1,-1,2)$. Seja $F = \mathcal{L}\{w_1, w_2\}$.

Tem-se

$$F^\perp = \{x \in \mathbb{R}^4 : \langle v, x\rangle = 0, \forall_{v\in F}\} = \{x \in \mathbb{R}^4 : \langle w_1, x\rangle = 0, \langle w_2, x\rangle = 0\}\,.$$

Pondo $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, as conclusões a satisfazer pelos elementos de $F^\perp$ são portanto

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

A solução geral deste sistema é

$$\begin{bmatrix} 2x_3 - 3x_4 \\ 3x_3 - 4x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3, x_4 \in \mathbb{R}\,.$$

Como $(2,3,1,0)$ e $(-3,-4,0,1)$ são linearmente independentes, constituem uma base de $F^\perp$. Designemos por $v_1$ e $v_2$ estes vectores. Como $\langle v_1, v_2\rangle = -18$, eles não são ortogonais. Para obter a partir deles uma base ortogonal de $F^\perp$, usamos o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt:

$$u_1 = v_1 = (2,3,1,0)$$

$$u_2 = v_2 - \mathrm{proj}_{u_1} v_2 = v_2 - \frac{\langle u_1, v_2\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = (-3,-4,0,1) - \frac{-18}{14}(2,3,1,0) = \frac{1}{7}(-3,-1,9,7)\,.$$

Uma base ortogonal de $F^\perp$ é portanto $\{(2,3,1,0), \frac{1}{7}(-3,-1,9,7)\}$.