DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

Resolução do exame final, 25/6/2007

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2-\alpha & 2 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Factorize A na forma LU, onde L é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais iguais a 1 e U é uma matriz em escada.

   Apliquemos a A o algoritmo de eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2-\alpha & 2 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix} \underset{L_2-2L_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 2 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix} \underset{L_3+L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 2 \\ 0 & 0 & \alpha+2 \end{bmatrix}.$$

   Tem-se portanto

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 2 \\ 0 & 0 & \alpha+2 \end{bmatrix}.$$

   (b) Diga para que valores de α a matriz A é invertível.

   A é invertível se e só se for não-singular, isto é, se e só se tiver três pivots. Para isso acontecer, tem de se ter $\alpha \neq 0$ e $\alpha + 2 \neq 0$. Os valores de α para os quais A é invertível são portanto todos os números reais excepto 0 e -2.

   (c) Faça $\alpha = 3$.

      i. Resolva o sistema $Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

      Usamos a factorização LU obtida na alínea (a). As transformações elementares levadas a cabo para obter U a partir de A não alteram a coluna $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Temos assim de resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

      que tem a solução $\frac{1}{15}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.