Como $b \neq \text{proj}_F b$, tem-se que $b \notin F$, e portanto b não pode ser combinação linear de u_1 e u_2. Assim, se A for a matriz 3×2 cujas colunas são u_1 e u_2, o sistema $Ax = b$ é impossível. A sua solução no sentido dos mínimos quadrados é a solução de $Ax = \text{proj}_F b$. Como $\text{proj}_F b = 1.u_1 - \frac{2}{3}.u_2$, concluímos que essa solução no sentido dos mínimos quadrados é $(1, -\frac{2}{3})$.

4. Considere a recta R definida pelas equações $\begin{cases} y - z = 0 \\ x - z = 2 \end{cases}$ e os planos P_1 e P_2 de equações cartesianas $x + y - z = 0$ e $x - y - 5 = 0$, respectivamente.

Determine:

(a) Equações paramétricas da recta paralela a R e que passa pelo ponto $(1, 2, 3)$. Qual é a distância entre estas duas rectas?

Das equações cartesianas da recta R tira-se que ela passa por $(2, 0, 0)$ e tem a direcção de $(1, 1, 1)$. Assim a recta pedida tem equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 3 + \alpha \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

A distância entre as duas rectas paralelas é a distância entre uma delas e um ponto da outra. Escolhendo por exemplo a segunda recta e o ponto $(2, 0, 0)$, que pertence à outra, vemos que a distância procurada é $\frac{1}{3}\sqrt{78} = \sqrt{\frac{26}{3}}$.

(b) Uma equação vectorial da recta que passa por $(1, 0, 1)$ e é paralela aos planos P_1 e P_2.

Se a recta é paralela aos dois planos, um vector director dela será ortogonal aos vectores ortogonais aos dois planos, que são $u_1 = (1, 1, -1)$ e $u_2 = (1, -1, 0)$. Um vector director da recta será portanto $u_1 \wedge u_2 = (-1, -1, -2)$. Assim, uma equação vectorial da recta é $(x, y, z) = (1, 0, 1) + \alpha(-1, -1, -2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) Uma equação cartesiana do plano ortogonal ao plano P_1 e que contém a recta R.

Se o plano é ortogonal ao plano P_1, é paralelo a $u_1 = (1, 1, -1)$. Se contém a recta R, passa pelo ponto $(2, 0, 0)$ e é paralelo a $u_3 = (1, 1, 1)$. Logo, o plano é ortogonal a $u_1 \wedge u_3 = (2, -2, 0)$. Assim, uma equação cartesiana dele é $\langle (2, -2, 0), (x, y, z) - (2, 0, 0) \rangle = 0$, ou seja $x - y = 2$.

(Este é o exercício 245 da Folha 16.)

5. O determinante de uma submatriz quadrada de ordem k de uma matriz A diz-se um **menor** de ordem k de A. Prove que $\text{car}(A)$ é igual à ordem do maior menor de A que é $\neq 0$.

Ver o texto teórico, página 77.