Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

14 de Janeiro de 2008 Duração: 2h30

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \\ 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Determine uma factorização LU de A, sendo L uma matriz triangular inferior com elementos diagonais iguais a 1 e U uma matriz em escada.

   (b) Indique a característica de A. A matriz A será invertível? Porquê?

   (c) Determine uma base do espaço das colunas e uma base do espaço da linhas de A.

   (d) Discuta, em função do parâmetro α, o sistema $Ax = b$.

   (e) Determine o conjunto das soluções de $Ax = b$, para $\alpha = 1$.

2. Para cada uma das seguintes afirmações diga, justificando de forma breve, se é verdadeira ou falsa.

   (a) Seja A uma matriz quadrada de ordem n invertível. Se B se obtiver de A multiplicando a linha i por 2, então B^{-1} obtém-se de A^{-1} multiplicando a coluna i por 2.

   (b) Sejam A e B matrizes quadradas de ordem 3, com $\det(A) = 5$ e $\det(B) = -3$. Então $\det(AB) = -15$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{5}$, $\det(A^T) = 5$ e $\det(2A) = 40$.

   (c) Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se existir $b \in \mathbb{R}^n$ tal que b não pertence ao espaço das colunas de A, então $\operatorname{nul}(A) > 0$.

   (d) Em $\mathbb{R}^3$ a recta de equação $(x, y, z) = (0, 1, 2) + \alpha(1, -1, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e o plano de equação $x - y + z = 5$ são paralelos.

3. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z = 0\} \text{ e } G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y - t = 0 \text{ e } z - t = 0\}.$$

   (a) Prove que F é de facto um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

   (b) Indique uma base e a dimensão de F.

   (c) Ter-se-á $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$?

4. Seja F o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine uma base ortogonal de F.

   (b) Determine o vector de F mais próximo do vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

5. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_r$ vectores de $\mathbb{R}^n$.

   (a) Prove que, se $v_1, v_2, \ldots, v_r$ forem linearmente independentes e se $w \in \mathcal{L}(v_1, v_2, \ldots, v_r)$, então w escreve-se de forma única como combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_r$.

   (b) Prove que, se $v_1, v_2, \ldots, v_r$ forem linearmente dependentes e $v_1 \neq 0$, então existe $i \in \{2, \ldots, r\}$ tal que v_i é combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}$.