Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

31 de Janeiro de 2008 Duração: 2h30

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Considere a matriz $A = LU$, sendo

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sem determinar A

(a) Diga que múltiplo da primeira linha de A foi adicionado à segunda para obter a segunda linha de U.

(b) Indique a característica de A.

(c) Indique uma base do espaço das colunas e uma base do espaço da linhas de A. (Basta identificar as linhas e as colunas pelo seu índice.)

(d) Discuta, em função do parâmetro α, o sistema $Ax = b$, onde $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

(e) Determine o conjunto das soluções de $Ax = b$, para $\alpha = 7$.

2. Para cada uma das seguintes afirmações diga, justificando de forma breve, se é verdadeira ou falsa.

(a) Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n. Se $AB = 0$, então $A = 0$ ou $B = 0$.

(b) Se A e B são matrizes quadradas de ordem n com determinante nulo, então $\det(A + B) = 0$.

(c) Se o espaço das colunas de uma matriz 3×3 for gerado pelos vectores $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, então a nulidade dessa matriz é 1.

(d) Em $\mathbb{R}^3$, a recta de equação $(x, y, z) = (1, 1, 1) + \alpha(1, 5, 2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e o plano de equação $x - y + 2z = 5$ são paralelos.

3. Seja $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0\}$.

(a) Prove que F é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(b) Indique uma base e a dimensão de F.

(c) Determine uma base ortogonal de F.

(d) Calcule a projeccção ortogonal do vector $(0, 1, 0)$ sobre F.

(e) Calcule o complemento ortogonal, $F^\perp$, de F.

4. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_r, u, v$ vectores de $\mathbb{R}^n$. Sejam $F = \mathcal{L}(v_1, v_2, \ldots, v_r)$, $G = \mathcal{L}(v_1, v_2, \ldots, v_r, u)$ e $H = \mathcal{L}(v_1, v_2, \ldots, v_r, v)$.

(a) Mostre que se $v \notin F$, mas $v \in G$, então $u \in H$.

(b) Prove que, se $v_1, v_2, \ldots, v_r$ forem linearmente independentes e se $w \in F$, então w escreve-se de forma única como combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_r$.