

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA  
**Frequência de Álgebra Linear e Geometria Analítica I**  
Licenciatura em Matemática

12 de Novembro de 2007

Duração: 1h

**Importante:** Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Seja  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ .

- (a) Factorize  $A$  na forma  $LU$ , onde  $L$  é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais iguais a 1 e  $U$  é uma matriz em escada.
- (b) Indique a característica de  $A$ .
- (c) Sem efectuar cálculos, justifique que a matriz  $A$  é invertível.
- (d) Resolva o sistema  $Ax = b$ , onde  $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .
- (e) Usando a alínea anterior, indique a segunda coluna de  $A^{-1}$ .

2. Para cada uma das seguintes afirmações diga, justificando de forma breve, se é verdadeira ou falsa.

- (a) Sendo  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  e  $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$ , se  $Au = Bu$ , então  $A = B$ .
- (b) Sendo  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  e  $C \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ , então  $(A + B)C = AC + BC$ .
- (c) Sendo  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  e  $B \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ , então  $(AB)^T = B^T A^T$ .
- (d) Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ . Se  $A^3 + 5A^2 - A = I_n$ , então  $A$  é invertível.

3. Usando as propriedades da função determinante, mostre que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{bmatrix} = 0.$$