Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

Exame final, 9/1/2009

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -8 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Factorize A na forma LU, onde L é uma matriz triangular inferior não-singular e U é uma matriz em escada.

   (b) Sendo $b = [0 \;\; 1 \;\; -1]^T$, resolva, se possível, o sistema $Ax = b$, mediante a resolução dos dois sistemas $Lc = b$ e $Ux = c$.

   (c) Indique a característica de A e uma base para o seu espaço das colunas.

   (d) Sendo $d = [2 \;\; \alpha+1 \;\; -1]^T$, determine todos os valores de α para os quais o sistema $Ax = d$ é possível.

2. Sem calcular os determinantes indicados, mostre que
$$\begin{vmatrix} ax & ay & az \\ a^2+x^2 & a^2+y^2 & a^2+z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax & y & z \\ ax^2 & y^2 & z^2 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Para cada uma das afirmações seguintes, diga, justificando, se é verdadeira ou falsa.

   (a) Sendo A e B matrizes simétricas, se $AB = BA$ então AB é simétrica.

   (b) Sendo A quadrada, se $\det(A) = 0$ então as colunas de A são linearmente independentes.

   (c) Sejam $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^n$. Se v_1 e v_2 são linearmente independentes e v_3 e v_4 também são linearmente independentes, e se nem v_3 nem v_4 pertencem a $\mathcal{L}\{v_1, v_2\}$, então v_1, v_2, v_3, v_4 são linearmente independentes.

4. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:
$$F = \mathcal{L}\{(0,1,0,-1), (0,0,2,0), (1,0,-1,0), (1,-1,0,1)\}, \; G = \{(a,b,c,d) : a = 0, \, b - d = 0\}.$$
Determine a dimensão e indique uma base para os subespaços F, G e $F \cap G$.

5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ e o vector $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Resolva o sistema $Ax = b$ no sentido dos mínimos quadrados.

   (b) Verifique que a projecção ortogonal p de b sobre $C(A)$ é $\begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}^T$.

   (c) Verifique que o vector $b - p$ é ortogonal às colunas da matriz A.

   (d) Determine a recta que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, aos pontos $(1,1)$, $(2,-1)$ e $(4,1)$.

6. Seja A uma matriz $m \times n$ e seja b uma coluna $m \times 1$. Designemos por A' a matriz $m \times (n+1)$ que se obtém juntando a A a coluna b. Sem usar o algoritmo de eliminação de Gauss, prove que o sistema $Ax = b$ é possível se e só se $\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A')$.