Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

Exame de recurso, 28/1/2009

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ \beta & 1 & \beta+1 & -\beta \\ -1 & \beta & 1 & \beta \end{bmatrix}, \text{ com } \beta \in \mathbb{R}.$$

   (a) Factorize A na forma LU, onde L é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais iguais a 1 e U é uma matriz em escada.

   (b) Determine todos os valores de β para os quais $\text{nul}(A) = 1$.

   (c) Faça $\beta = 0$.

      i. Determine o espaço nulo de A.

      ii. Determine a solução geral do sistema $Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

2. Mostre que
$$\begin{vmatrix} \alpha+1 & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha+2 & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha+3 & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & \alpha+4 & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha+5 \end{vmatrix} = 120\left(1+\alpha+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{5}\alpha\right).$$

3. Para cada uma das afirmações seguintes, diga, justificando, se é verdadeira ou falsa.

   (a) Sendo A $m \times n$ tal que, para qualquer $b \in \mathbb{R}^m$, o sistema $Ax = b$ é possível, então o sistema $A^T y = 0$ só tem a solução nula.

   (b) Se $v_1, \ldots, v_k$ geram $\mathbb{R}^{2009}$, então $k < 2009$.

   (c) Sendo A $m \times n$ e B $p \times m$, o espaço das colunas de BA está contido no espaço das colunas de B.

   (d) Sendo u e v vectores de $\mathbb{R}^n$, tem-se $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\|u\|^2\|v\|^2 + \|v\|^2$.

4. Seja F o subespaço de $\mathbb{R}^3$ definido por $F = \{(x, y, z) : x - 2y = 0\}$.

   (a) Determine uma base e indique a dimensão de F.

   (b) Construa uma base de $\mathbb{R}^3$ que contenha a base determinada na alínea anterior.

5. Seja F o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $(1, 0, -2)$ e $(0, 1, 5)$.

   (a) Determine uma base ortogonal de F.

   (b) Sendo $b = (-1, 1, -3)$, calcule a projecção ortogonal de b sobre F.

   (c) Usando as alíneas anteriores, construa um sistema de três equações lineares com duas incógnitas, impossível, e que tenha $\overline{x} = (1, -\frac{2}{3})$ como única solução no sentido dos mínimos quadrados. Justifique.

6. (a) Seja A uma matriz do tipo $m \times 4$. Sejam v_1, v_2, v_3, v_4 vectores de $\mathbb{R}^4$ linearmente independentes. Prove que, se $Av_1 = Av_2 = Av_3 = Av_4 = 0$, então A tem que ser a matriz nula.

   (b) Dê um exemplo que mostre que a conclusão de (a) falha sem a hipótese da independência linear.