Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

Frequência, 17/12/2008

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 - 3x_5 & = & 3 \\ -x_1 \quad - \; 4x_3 \; + \; 3x_4 \; - \; 5x_5 & = & -2 \end{cases}$$

   (a) Escreva a matriz A do sistema.

   (b) Factorize A na forma LU, onde L é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais iguais a 1 e U é uma matriz em escada.

   (c) Diga qual é a característica de A.

   (d) Resolva o sistema.

2. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vectores de $\mathbb{R}^n$.

   (a) Dado um subespaço F de $\mathbb{R}^n$, diga o que significa dizer-se que $v_1, v_2, \ldots, v_k$ geram F.

   (b) Diga o que significa dizer-se que $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são linearmente independentes.

   (c) Enuncie e demonstre um critério de independência linear que é útil na prática.

3. Seja A uma matriz $n \times n$. Sejam $w_1, w_2, \ldots, w_k$ vectores $n \times 1$.
   Prove que, se $\det(A) \neq 0$ e $w_1, w_2, \ldots, w_k$ forem linearmente independentes, então também $Aw_1, Aw_2, \ldots, Aw_k$ são linearmente independentes.

4. (a) Determine uma base ortogonal para o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $(1, 1, 1)$ e $(0, 3, 6)$.

   (b) Calcule a projecção ortogonal do vector $(1, 4, 5)$ sobre o subespaço da alínea (a).

   (c) Usando o resultado da alínea anterior, determine a linha recta que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, aos pontos $(0, 1)$, $(3, 4)$, $(6, 5)$. Represente graficamente.

5. Dado um sistema impossível $Ax = b$, explique porque é que as suas soluções no sentido dos mínimos quadrados são exactamente as soluções do sistema $A^T Ax = A^T b$.