Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

Resolução da frequência de 17/12/2010

(Não se apresentam todos os cálculos.)

1. **Considere a matriz** $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{5} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{8} & \mathbf{12} \end{bmatrix}$.

   (a) **Resolva o sistema $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$.**

   A matriz que se obtém de A aplicando-lhe o algoritmo de eliminação é $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   O sistema $Ux=0$ reduz-se portanto a $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$, cuja solução geral é $\begin{bmatrix} -5x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $x_3 \in \mathbb{R}$.

   (b) **Indique uma base para o espaço nulo de $\boldsymbol{A}$.**

   Pela alínea (a), o vector $\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ gera o espaço nulo de A. Como é não nulo, é linearmente independente, pelo que uma base do espaço nulo de A é $\left\{ \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

   (c) **Indique a característica de $\boldsymbol{A}$ e uma base para o seu espaço das colunas.**

   A característica de A é 2, porque A tem dois pivots. Uma base do espaço das colunas de A é constituída pelos vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$.

2. **Mostre que** $$\det \begin{bmatrix} \alpha+1 & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha+2 & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha+3 & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & \alpha+4 & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha+5 \end{bmatrix} = 120\left(1+\alpha+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{5}\alpha\right).$$

Subtraindo a primeira linha da matriz a todas as outras (o que não altera o determinante), vemos que o determinante indicado é igual a

$$\det \begin{bmatrix} \alpha+1 & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Subtraia-se agora sucessivamente à primeira linha a segunda multiplicada por $\dfrac{\alpha}{2}$, depois a terceira multiplicada por $\dfrac{\alpha}{3}$, a quarta multiplicada por $\dfrac{\alpha}{4}$ e a quinta multiplicada por $\dfrac{\alpha}{5}$. Obtemos uma matriz triangular inferior cujos elementos diagonais são $1+\alpha+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{5}\alpha$ e 2, 3, 4, 5. O determinante desta matriz é o produto destes cinco números, que é igual a $120\left(1+\alpha+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{5}\alpha\right)$.

3. **Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vectores de $\mathbb{R}^n$.**

(a) **Diga o que significa dizer-se que $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são linearmente independentes.**

$v_1, v_2, \ldots, v_k$ são linearmente independentes se nenhum deles for igual a uma combinação linear dos $k-1$ restantes. Para o caso de k ser 1: v_1 é linearmente independente se for não nulo.

(b) **Se $v_1, v_2, \ldots, v_k$ forem linearmente independentes e $w \notin \text{ger}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, prove que $v_1, v_2, \ldots, v_k, w$ são linearmente independentes.**

Olhemos para uma combinação linear dos vectores $v_1, \ldots, v_q, w$ que seja igual ao vector nulo:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_q v_q + \alpha_{q+1} w = 0\,.$$

Se α_{q+1} fosse diferente de 0, ter-se-ia $w = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_{q+1}} v_1 - \cdots - \dfrac{\alpha_q}{\alpha_{q+1}} v_q$ e então $w \in \text{ger}\{v_1, \ldots, v_q\}$, contra a hipótese. Logo, $\alpha_{q+1} = 0$. Mas então ficamos com

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_q v_q = 0\,.$$

Como $v_1, \ldots, v_q$ são linearmente independentes, isto implica que também $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_q = 0$, e fica provado que é impossível escrever o vector nulo como combinação linear dos vectores $v_1, \ldots, v_q, w$ a não ser com todos os coeficientes iguais a zero.

4. **Calcule a projecção ortogonal do vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ sobre o subespaço gerado por $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.**

Como $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ não são ortogonais, aplicamos-lhes o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, obtendo os vectores (ortogonais) $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. A projecção ortogonal do vector $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ sobre o subespaço indicado é então

$$\frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2}\, u_1 + \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2}\, u_2 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 \\ 23 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

5. **Sejam $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{G}$ subespaços de $\mathbb{R}^n$.**

(a) **Defina $\boldsymbol{F+G}$ e prove que se trata de um subespaço de $\mathbb{R}^n$.**

$F+G$ é o conjunto $\{v+w:\ v\in F \text{ e } w\in G\}$. Provemos que se trata de um subespaço. Como $0\in F$ e $0\in G$, $0=0+0\in F+G$, e portanto $F+G$ é não vazio. Sejam u e v vectores arbitrários de $F+G$. Então, por definição de $F+G$, existem vectores $u_1, v_1 \in F$ e $u_2, v_2 \in G$ tais que $u=u_1+u_2$ e $v=v_1+v_2$. Logo, $u+v==(u_1+u_2)+(v_1+v_2)=(u_1+v_1)+(u_2+v_2)\in F+G$, uma vez que, pelo facto de F e G serem subespaços, se tem $u_1+v_1\in F$ e $u_2+v_2\in G$. De modo análogo se vê que $\alpha u\in F+G$, para qualquer $u\in F+G$ e qualquer $\alpha\in\mathbb{R}$.

(b) **Prove que $\boldsymbol{(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp}$.**

Um vector x pertence a $(F+G)^\perp$ se e só se for ortogonal a todas as somas $v+w$ com $v\in F$ e $w\in G$, e se isso acontecer x é ortogonal a todos os vectores de F e também a todos os vectores de G, ou seja pertence a $F^\perp\cap G^\perp$. Reciprocamente, se x pertencer a $F^\perp\cap G^\perp$, x é ortogonal a todos os vectores de F e também a todos os vectores de G, e portanto é ortogonal a todas as somas $v+w$ com $v\in F$ e $w\in G$, ou seja pertence a $(F+G)^\perp$.

6. **Escreva uma equação vectorial do plano que contém os pontos $\begin{bmatrix}\mathbf{5}\\ \mathbf{7}\\ \mathbf{8}\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{9}\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}\mathbf{4}\\ \mathbf{3}\\ \mathbf{6}\end{bmatrix}$.**

Designemos os três pontos por p, q e r, respectivamente. Então os vectores $v_1=q-p$ e $v_2=r-p$ constituem uma base do subespaço director do plano, pelo que uma equação vectorial deste é $x=p+\alpha v_1+\beta v_2$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ou seja

$$x=\begin{bmatrix}5\\7\\8\end{bmatrix}+\alpha\begin{bmatrix}-5\\-6\\1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}-1\\-4\\-2\end{bmatrix},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$