DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

Resolução do teste 18/10/2010

1. (a) Prove que o produto de duas matrizes triangulares superiores da mesma ordem é ainda uma matriz triangular superior. A que são iguais os elementos diagonais deste produto?

   (b) Explique como é que uma afirmação análoga para matrizes triangulares inferiores se pode deduzir imediatamente da alínea anterior.

2. Considere o sistema $Ax = b$, onde $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ -2 & -2 & -4 & -6 \\ 4 & 8 & 12 & 8 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   Resolva o sistema de acordo com os seguintes passos:

   (a) Factorize A na forma $A = LU$, onde L é triangular inferior com elementos diagonais iguais a 1 e U é uma matriz em escada.

   (b) Resolva o sistema $Lc = b$.

   (c) Determine $N(A)$, o espaço nulo de A.

   (d) Usando a alínea anterior, resolva $Ux = c$.

---

1. (a) Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ duas matrizes $n \times n$ triangulares superiores. Tem-se então $a_{ij} = 0$ se $i > j$ e também $b_{ij} = 0$ se $i > j$. O elemento na posição (i, j) de AB é $\sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$. Se $i > j$, este somatório é nulo porque todas as suas parcelas o são: para k de 1 até j, o factor a_{ik} é nulo; para k de $j+1$ até n, o factor b_{kj} é nulo. Logo, AB é triangular superior. Se $i = j$, o somatório reduz-se à parcela $a_{ii} b_{ii}$, pelo que os elementos diagonais de AB são os produtos dos correspondentes elementos diagonais de A e B.

   (b) Se A e B forem triangulares inferiores, A^T e B^T são triangulares superiores. Como $(AB)^T = B^T A^T$, a afirmação desejada segue imediatamente da alínea anterior.

2. (Não se apresentam os cálculos, só os resultados.)

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$.   (b) $c = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$.   (c) $N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -\alpha \\ -\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.

   (d) O conjunto das soluções é

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha \\ -\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -\alpha \\ 1-\alpha \\ \alpha \\ -1 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$