Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

Resolução do teste 22/11/2010

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$. Usando determinantes, indique o elemento na posição $(2,3)$ de A^{-1}.

2. O sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 4 \end{cases}$ é possível determinado. Usando a regra de Cramer, calcule o valor da incógnita x_2.

3. Sendo F e G subespaços de $\mathbb{R}^n$, prove que $F \cap G$ é também um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

4. Considere os vectores $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $v_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ \beta \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$, onde β é um número real. Determine os valores de β para os quais $v_3 \in \text{ger}\{v_1, v_2\}$.

(Não se apresentam os cálculos, só os resultados.)

1. O elemento na posição $(2,3)$ da adjunta de A é $(-1)^{3+2} \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = 6$. Como $\det(A) = -3$, o elemento na posição $(2,3)$ de A^{-1} é $\dfrac{6}{-3} = -2$.

2. Pela regra de Cramer, $x_2 = \dfrac{\det \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}} = \dfrac{-6}{-4} = \dfrac{3}{2}$.

3. Como a origem de $\mathbb{R}^n$ pertence a F e a G, também pertence a $F \cap G$. Logo, $F \cap G \neq \varnothing$.

   Sejam agora $u, v \in F \cap G$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Como F e G são subespaços, $u + v$ e αu pertencem a F e também pertencem a G. Logo, $u + v \in F \cap G$ e $\alpha u \in F \cap G$. Concluímos assim que $F \cap G$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

4. $v_3 \in \text{ger}\{v_1, v_2\}$ se e só se existirem números α_1 e α_2 tais que $v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$. Esta igualdade é equivalente ao sistema $\begin{cases} \alpha_1 = -3 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = -2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = \beta \end{cases}$. Este sistema é possível se e só se $\beta = -2$.