Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica II

Exame, 13/6/2001 Duração: 2h 30m

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Seja $B = \{v_1, v_2\}$ uma base de um espaço vectorial real V. Seja $T : V \to V$ a aplicação linear representada, relativamente à base B, pela matriz
$$\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}.$$
Considere ainda a base $B' = \{u_1, u_2\}$ de V, onde $u_1 = -v_2$ e $u_2 = v_1 - v_2$.
   (a) Determine a matriz de mudança da base B para a base B'.
   (b) Usando a matriz determinada na alínea anterior, calcule:
      i. As coordenadas do vector $v = 3v_1 + 4v_2$ na base B'.
      ii. A matriz que representa T relativamente à base B'.
   (c) Averigúe se existe uma base de V relativamente à qual T seja representada por uma matriz diagonal. Em caso afirmativo, indique uma tal base e essa matriz.
   (d) Classifique a cónica definida pela equação $6x^2 - 8xy + 6y^2 = 100$.

2. Para cada uma das afirmações seguintes, diga se é verdadeira ou falsa, justificando a escolha feita.
   (a) Seja A uma matriz $m \times n$. Se o espaço das colunas de A for gerado por $n - p$ colunas de A, então a nulidade de A é p.
   (b) Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se A tiver característica m, então existe uma matriz $C \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ tal que $AC = I_m$.
   (c) Seja A uma matriz real. Se u e v são duas soluções no sentido dos mínimos quadrados do sistema $Ax = b$, então $u - v$ pertence ao núcleo de A.
   (d) O plano de equação vectorial $(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 0, 2) + \mu(-1, 1, 1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tem uma equação cartesiana $-2x - 3y + z + 5 = 0$.

3. Seja V o espaço vectorial real dos polinómios em x com coeficientes reais e grau menor ou igual a dois. Seja W o subespaço de V gerado por $\{x, 1 + x^2\}$. Considere em V o produto interno dado por
$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 .$$
   (a) Verifique que $\{x, 1 + x^2\}$ é uma base ortogonal de W.
   (b) Determine o elemento de W mais próximo de $(2 + x)^2$.
   (c) Determine $W^\perp$ e indique uma sua base.

4. (a) Seja V um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V. Seja $T : V \to V$ uma aplicação linear injectiva. Mostre que $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ é uma base de V.
   (b) Existirá alguma aplicação linear injectiva $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$? Justifique.

5. Seja A uma matriz simétrica real de ordem n. Sejam λ e μ dois valores próprios de A distintos.
   (a) Mostre que existe um vector não nulo $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $(A - \lambda uu^T)u = 0$.
   (b) Sejam x e y vectores próprios de A associados a λ e μ, respectivamente. Mostre que y é também vector próprio de $A - \lambda uu^T$ e indique o valor próprio a que está associado.