Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica II

Exame, 9/7/2001 — Duração: 2h 30m

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Seja $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de um espaço vectorial real V. Sejam $f, g : V \to \mathbb{R}$ duas aplicações lineares tais que: $f(v_1) = 3$, $f(v_2) = 1$, $f(v_3) = 0$; $g(\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3) = -\beta - \gamma$, $\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
   Considere a aplicação linear $T : V \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(v) = (0, f(v), g(v))$, para cada $v \in V$.

   (a) Determine a matriz que representa T relativamente à base B de V e à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Determine o núcleo e o subespaço imagem de T.

   (c) Considere a base $B' = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Determine a matriz de mudança da base B' para a base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   (d) Usando a matriz determinada na alínea anterior, determine a matriz que representa T relativamente à base B de V e à base B' de $\mathbb{R}^3$.

2. Para cada uma das afirmações seguintes, diga se é verdadeira ou falsa, justificando a escolha feita.

   (a) Existe uma matriz real 4×3 cujo espaço nulo é gerado por $\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T\}$ e o espaço das colunas é gerado por $\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T\}$.

   F (b) Sejam V e W espaços vectoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, e $T : V \to W$ uma aplicação linear sobrejectiva. Então a imagem por T de uma base de V é uma base de W.

   (c) A linha recta que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, aos pontos $(1,4), (-2,2)$ e $(1,8)$ é $y = 4/3\,x + 14/3$.

   F (d) A recta de equação $(x,y,z) = (1,2,3) + \lambda(1,5,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, é paralela aos planos de equações $x - y + 2z + 5 = 0$ e $2x - z - 1 = 0$.

3. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

   Sabendo que $N(A - I)$ é gerado por $\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\}$, determine:

   (a) Um valor próprio de A, sem efectuar cálculos.

   (b) Uma base ortonormada para o subespaço $N(A - I)$.

   (c) Uma matriz ortogonal Q tal que $Q^T A Q$ seja diagonal.

4. Seja S um subespaço de um espaço vectorial real com produto interno V. Considere o complemento ortogonal de S em V: $S^\perp = \{u \in V : \langle u, v\rangle = 0,\ \forall v \in S\}$.

   (a) Prove que $S^\perp$ é um subespaço vectorial de V.

   (b) Sejam S_1 e S_2 subespaços de V. Mostre que $(S_1 + S_2)^\perp = S_1^\perp \bigcap S_2^\perp$.

5. (a) Seja V um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}$, e $T : V \to V$ uma aplicação linear. Sejam u e $w \in V$, com $w \neq 0$, tais que $T(u) = w$. Sejam $\mathcal{L}(u)$ e $\mathcal{L}(w)$ os subespaços gerados por u e w, respectivamente. Mostre que $T(V) = \mathcal{L}(w)$ se e só se $V = \mathcal{L}(u) \oplus N(T)$.

   (b) Dê um exemplo de uma aplicação linear nas condições da alínea anterior, supondo a dimensão de V superior a 1.