Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica II

(Licenciaturas em Matemática e Engenharia Geográfica)

Exame, 13/6/2002

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Seja F o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerados pelos vectores $(1,0,1)$ e $(1,1,1)$.
   (a) Determine uma base ortogonal de F. $\{(1,0,1),(0,1,0)\}$
   (b) Calcule a projecção ortogonal do vector $(1,-1,2)$ sobre F.
   (c) Determine a recta que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, aos pontos $(1,1)$, $(0,-1)$ e $(1,2)$. Faça uma figura.

2. Para cada uma das afirmações seguintes, diga, justificando, se é verdadeira ou falsa.
   (a) Sendo u e v vectores de $\mathbb{R}^n$, tem-se $\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\langle u, v\rangle$.
   (b) Se Q for uma matriz $n \times n$ ortogonal, então $\langle Qx, Qy\rangle = \langle x, y\rangle$ quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$.
   (c) Se uma matriz quadrada A for invertível, então 0 é valor próprio de A.
   (d) Se V for um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$, então V é isomorfo a $\mathbb{R}^n$ para algum número natural n.

$y = z \quad x = z + 2$

3. Considere a recta R definida pelas equações $\begin{cases} y - z = 0 \\ x - z = 2 \end{cases}$ e os planos P_1 e P_2 de equações cartesianas $x + y - z = 0$ e $x - y - 5 = 0$, respectivamente. $u = (1,-1,0)$

$(1,1,-1)$ $(1,-1,0)$ $x = (x,y,z)$

Determine:

equações cartesianas $\langle (1,-1,0),(b_1,b_2,b_3)\rangle = 5$

   (a) Equações paramétricas da recta paralela a R e que passa pelo ponto $(1,2,3)$. Qual é a distância entre estas duas rectas?
   (b) Uma equação vectorial da recta que passa por $(1,0,1)$ e é paralela aos planos P_1 e P_2.
   (c) Uma equação cartesiana do plano ortogonal ao plano P_1 e que contém a recta R.

4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.
   (a) Determine os subespaços próprios de A.
   (b) Diga se A é diagonalizável e, em caso afirmativo, indique duas matrizes invertíveis V_1 e V_2 tais que $V_1^{-1}AV_1$ e $V_2^{-1}AV_2$ sejam matrizes diagonais. Indique também as matrizes diagonais obtidas.
   (c) Identifique e esboce a cónica definida pela equação

$$x^2 - 2xy + y^2 + 6\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y - 1 = 0.$$

5. (a) Sendo $F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a + b = 0 \text{ e } d = 0 \right\}$, prove que F é um subespaço de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e determine a sua dimensão.
   (b) Sendo $T : \mathbb{R}^3 \to F$ a transformação linear definida por

$$T(1,0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T(1,1,0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad T(1,0,1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   determine $T(x,y,z)$ para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
   (c) Determine $N(T)$ e $C(T)$. O que pode afirmar sobre a injectividade e a sobrejectividade de T?

Álgebra Linear e Geometria Analítica II
Resumo da resolução do exame de 13/6/2002

1. (a) Ponhamos $v_1 = (1,0,1)$ e $v_2 = (1,1,1)$. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt a estes dois vectores obtemos

0,7

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = (0,1,0) \; . \end{aligned}$$

Os vectores u_1 e u_2 constituem uma base ortogonal de F.

(b) Ponhamos $v = (1,-1,2)$. Como u_1 e u_2 constituem uma base ortogonal de F, a projecção ortogonal de v sobre F é dada por

0

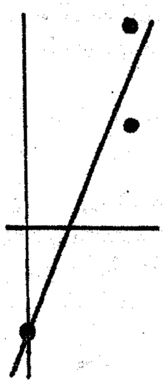
$$\frac{\langle v, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle v, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \left(\tfrac{3}{2}, -1, \tfrac{3}{2}\right) \; .$$

(c) O declive $\overline{d}$ e a ordenada na origem $\overline{h}$ da recta pedida são determinados a partir do sistema

0,5

$$\begin{cases} d+h=1 \\ h=-1 \\ d+h=2 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema no sentido dos mínimos quadrados (para o que podemos utilizar o resultado da alínea anterior), obtemos $\overline{d} = \frac{5}{2}$, $\overline{h} = -1$, pelo que a recta procurada é a recta de equação $y = \frac{5}{2}x - 1$.



2. (a) A afirmação é verdadeira. Demonstração: $\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle - \langle u-v, u-v\rangle = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 - (\|u\|^2 - 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2) = 4\langle u,v\rangle$.

1

(b) A afirmação é verdadeira. Demonstração: $\langle Qx, Qy\rangle = (Qx)^T Qy = x^T Q^T Q y = x^T y = \langle x, y\rangle$ (porque $Q^T Q = I$, já que Q é ortogonal).

1

(c) A afirmação é falsa. Se A for invertível, o sistema $Ax = 0$ só tem a solução nula, e portanto não existe nenhum vector v não nulo tal que $Av = 0$, isto é, 0 não é valor próprio de A.

1

(d) A afirmação é falsa. Se V tiver dimensão infinita (ou 0), V não é isomorfo a $\mathbb{R}^n$ para nenhum número natural n.

0

$y = z \, ; \, x = z+2$

3. (a) A solução geral do sistema $\begin{cases} y - z = 0 \\ x - z = 2 \end{cases}$ é $(z+2, z, z)$, $z \in \mathbb{R}$, isto é,

0

$$(2,0,0) + t(1,1,1) \ , \ \ t \in \mathbb{R}$$

pelo que R é a recta que passa pelo ponto $(2,0,0)$ e tem a direcção de $(1,1,1)$. Logo, a recta paralela a R e que passa pelo ponto $(1,2,3)$ tem equação vectorial

$$(x,y,z) = (1,2,3) + t(1,1,1) \ , \ \ t \in \mathbb{R}$$

e equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases} , \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Para achar a distância entre as duas rectas, basta calcular a distância de um ponto de uma delas à outra. Por exemplo, a distância de $(1,2,3)$ a R é igual à distância de $(1,2,3)-(2,0,0)$ a $\mathcal{L}\{(1,1,1)\}$, que por sua vez é igual à distância entre $(-1,2,3)$ e a sua projecção ortogonal sobre $(1,1,1)$. Calculando esta distância, obtemos

$$\|(-1,2,3) \ - \ \frac{4}{3}(1,1,1)\| = \frac{\sqrt{78}}{3}.$$

(b) A intersecção dos planos P_1 e P_2 é uma recta com a direcção do vector $(1,1,2)$. Qualquer recta paralela aos dois planos tem que ter a mesma direcção. Logo, uma equação vectorial da recta pedida é

$$(x,y,z) = (1,0,1) + t(1,1,2) \ , \ \ t \in \mathbb{R}.$$

0

Resolução alternativa: O vector $v_1 = (1,1,-1)$ é ortogonal ao plano P_1, e o vector $v_2 = (1,-1,0)$ é ortogonal ao plano P_2. Uma recta paralela aos dois planos tem que ser ortogonal a v_1 e a v_2, logo tem que ter a direcção de $v_1 \wedge v_2$, que é igual a $(-1,-1,-2)$, etc.

(c) Um plano ortogonal ao plano P_1 tem que ser paralelo ao vector $v_1 = (1,1,-1)$. E se contém a recta R tem que conter o ponto $p = (2,0,0)$ e ser paralelo ao vector $w = (1,1,1)$ (ver

0 alínea (a)). Logo, tem que ser ortogonal ao vector

$$u = v_1 \wedge w = (2,-2,0)\,,$$

pelo que tem equação cartesiana

$$\langle u, x - p \rangle = 0\,,$$

isto é, $2(x-2) - 2y = 0$, o que é o mesmo que

$$x - y = 2\,.$$

$\langle u, x - p \rangle$

$= \langle (2,-2,0), (x-2, y, z) \rangle$

$= 2(x-2) - 2y = 0$

$2x - 4 - 2y = 0$

4. (a) Os valores próprios de A são 2 e 0.

1,5 O subespaço próprio associado a 2 é $\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \right\}$.

O subespaço próprio associado a 0 é $\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \right\}$.

(b) Como A tem os valores próprios distintos, é diagonalizável. Uma matriz diagonalizante é, por exemplo,

0

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Outra (que é ortogonal) é

$$V_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Em ambos os casos a matriz diagonal obtida é $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) Introduzindo a mudança de coordenadas dada por

0

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

a equação fica

$$2x'^2 + 4x' + 8y' - 1 = 0$$

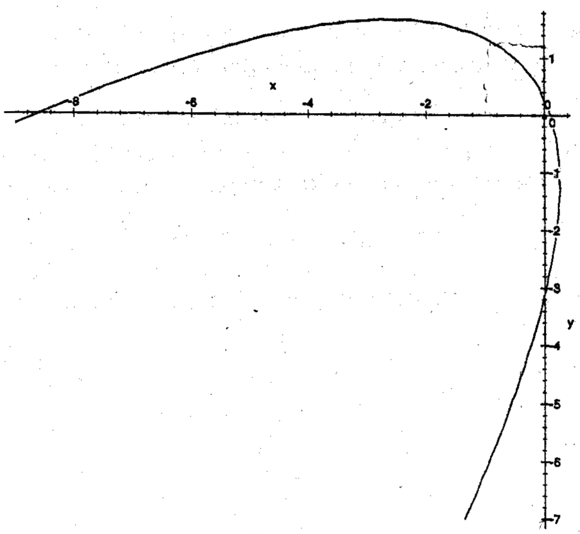
o que é o mesmo que

$$2(x'+1)^2 + 8y' - 3 = 0.$$

Fazendo $x'' = x' + 1$ e $y'' = y' - \frac{3}{8}$, obtemos finalmente

$$2x''^2 + 8y'' = 0$$

que é a equação de uma parábola.



5. (a) F é evidentemente diferente do vazio (por exemplo a matriz nula 2×2 pertence a F). A soma de dois elementos de F ainda pertence a F:

1

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{bmatrix}$$

que ainda pertence a F porque $(a+a')+(b+b') = (a+b)+(a'+b') = 0$ e $d+d' = 0$.
O produto de um número real α por um elemento de F ainda pertence a F:

$$\alpha \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}$$

que ainda pertence a F porque $\alpha a + \alpha b = \alpha(a+b) = 0$ e $\alpha d = 0$.
Seja $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ um elemento qualquer de F. Como $a+b=0$ e $d=0$, tem-se

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -a \\ c & 0 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

pelo que $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ geram F. Como são independentes, a dimensão de F é 2.

(b) Como $(x,y,z) = (x-y-z)(1,0,0) + y(1,1,0) + z(1,0,1)$, tem-se

0

$$T(x,y,z) = (x-y-z)\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & x \\ 2y & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Já vimos que o espaço F tem dimensão 2. Por seu lado, $C(T)$, que é um subespaço de F, contém dois vectores independentes, que são as matrizes

0,6

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(imagens dos vectores $(1,0,0)$ e $(1,1,0)$, respectivamente).
Logo, $C(T)$ só pode ser igual a F, pelo que T é sobrejectiva.

T claramente não é injectiva, pois os vectores $(1,0,0)$ e $(1,0,1)$ têm a mesma imagem. Como $\operatorname{car}(T) = 3 - \dim N(T)$, tem-se $\dim N(T) = 1$. Como os vectores $(1,0,0)$ e $(1,0,1)$ têm a mesma imagem, a sua diferença, $(0,0,1)$, pertence ao núcleo. Segue-se que

$$N(T) = \mathcal{L}\{(0,0,1)\} = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Também se pode chegar a esta conclusão a partir da condição $T(x,y,z) = (0,0,0)$.

Cotação:

1.	(*a*) 1	2.	(*a*) 1	3.	(*a*) 1,5	4.	(*a*) 1,5	5.	(*a*) 1,5
	(*b*) 1		(*b*) 1		(*b*) 1,25		(*b*) 1		(*b*) 1,5
	(*c*) 1,5		(*c*) 1		(*c*) 1,25		(*c*) 1,5		(*c*) 1,5
			(*d*) 1						

3,5 4 4 4,5