Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica II

(Licenciaturas em Matemática e Engenharia Geográfica)

Exame, 8/7/2002

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine uma base ortogonal do espaço das colunas da matriz A.

   (b) Calcule a projecção ortogonal de b sobre $C(A)$.

   (c) Utilizando a alínea anterior, determine a solução do sistema $A^TAx = A^Tb$.

2. Para cada uma das afirmações seguintes, diga, justificando, se é verdadeira ou falsa.

   (a) Sendo x e y vectores quaisquer de $\mathbb{R}^n$, tem-se $\|x-y\| \leq \|x\| - \|y\|$.

   (b) Sendo $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vectores de $\mathbb{R}^n$ ortogonais dois a dois, tem-se $\left\| \sum_{i=1}^{k} v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|v_i\|^2$.

   (c) Se u e v forem vectores próprios da matriz A associados aos valores próprios α e β, respectivamente, então v é vector próprio da matriz $A - \alpha I$.

   (d) Se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ for uma transformação linear, então T transforma ~~rectas~~ planos paralelas em rectas paralelas.

3. Considere as rectas R_1 e R_2 de equações $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 - 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ e $\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 3 \end{cases}$, respectivamente, e o plano P de equação $x + y + 2z = 2$.

   (a) Determine a posição relativa de R_1 e R_2.

   (b) Determine uma equação cartesiana do plano que contém R_1 e R_2.

   (c) Calcule a distância entre R_2 e P.

4. (a) Prove que qualquer matriz simétrica real é diagonalizável com uma matriz diagonalizante ortogonal.

   (b) Determine uma matriz diagonalizante ortogonal para a matriz $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

   (c) Identifique e esboce a superfície no espaço definida pela equação $xy = z^2$.

5. Designemos por $\mathbb{R}_2[\lambda]$ o espaço vectorial real dos polinómios em λ de grau ≤ 2. Seja $T : \mathbb{R}_2[\lambda] \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(1) = (1,0), \quad T(1+\lambda) = (\alpha, \alpha), \quad T(\lambda^2) = (0,-1).$$

   onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Existe algum valor de α tal que T seja injectiva? Existe algum valor de α tal que T seja sobrejectiva? Justifique.

   (b) Para $\alpha = 0$, determine a matriz que representa T relativamente às bases $\{1, 1+\lambda, \lambda^2\}$ de $\mathbb{R}_2[\lambda]$ e $\{(1,1), (0,2)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Álgebra Linear e Geometria Analítica II
Resumo da resolução do exame de 8/7/2002

1. (a) Ponhamos $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt a estes dois vectores obtemos

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Os vectores u_1 e u_2 constituem uma base ortogonal de $C(A)$.

(b) Como u_1 e u_2 constituem uma base ortogonal de $C(A)$, a projecção ortogonal de b sobre $C(A)$ é dada por

$$b_{C(A)} = \frac{\langle b, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle b, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = u_1 .$$

(c) A solução do sistema $A^T A x = A^T b$ é exactamente a mesma que a solução do sistema $Ax = b_{C(A)}$, que é $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2. (a) A afirmação é falsa. Exemplo em $\mathbb{R}^2$: $x = (1,0)$, $y = (0,1)$. Tem-se $\|x - y\| = \sqrt{2}$ e $\|x\| - \|y\| = 0$.

(b) A afirmação é verdadeira. Demonstração:

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} v_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{k} v_i , \sum_{j=1}^{k} v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle v_i, v_i \rangle = \sum_{i=1}^{k} \|v_i\|^2$$

porque $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ quando $i \neq j$.

(c) A afirmação é verdadeira. Demonstração: $(A - \alpha I)v = Av - \alpha v = \beta v - \alpha v = (\beta - \alpha)v$ e v é vector próprio de $A - \alpha I$ associado ao valor próprio $\beta - \alpha$.

(d) A afirmação é falsa. Por exemplo, a transformação nula transforma qualquer conjunto no conjunto singular $\{(0,0,0)\}$.

Observação: De uma forma geral, se T não for injectiva, qualquer conjunto contido no núcleo de T será transformado no conjunto singular $\{(0,0,0)\}$. Mas uma recta $\{p\} + \mathcal{L}\{v\}$ cujo vector director não pertença ao núcleo de T será transformada na recta $T(\{p\}) + \mathcal{L}\{T(v)\}$, já que $T(v)$ é não nulo por v o ser.

Como duas rectas são paralelas se tiverem o mesmo vector director, podemos assim afirmar que T transforma rectas paralelas cujo vector director não pertença ao núcleo de T em rectas paralelas. Em particular isso acontece se T for injectiva.

Note-se que, se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ for injectiva, também será sobrejectiva, já que nesse caso $\text{car}(T) = 3 - \text{nul}(T) = 3$.

3. (a) Substituindo, nas equações da segunda recta, x, y e z por $1+t$, 2 e $3-2t$, respectivamente, vemos que as equações só são simultâneamente satisfeitas para $t = 1$. As duas rectas são portanto concorrentes, isto é, têm exactamente um ponto em comum, que é o ponto $p = (2,2,1)$.

(b) R_1 tem a direcção do vector $v_1 = (1,0,-2)$. Quanto a R_2, a solução geral do sistema $\begin{cases} x-y=0 \\ y+z=3 \end{cases}$ é $(-z+3,-z+3,z)$, $z \in \mathbb{R}$, pelo que R_2 tem a direcção de $v_2 = (-1,-1,1)$. O plano que contém R_1 e R_2 passa pelo ponto p comum às duas rectas e é ortogonal ao vector $u = v_1 \wedge v_2$, que é igual a $(-2,1,-1)$. A sua equação cartesiana é $\langle u, x-p\rangle = 0$, isto é, $-2(x-2)+(y-2)-(z-1)=0$, o que é o mesmo que $-2x+y-z=-3$.

(c) Como v_2, o vector director de R_2, é ortogonal a $(1,1,2)$, que é o vector ortogonal ao plano P, a recta R_2 é paralela a P. A distância entre R_2 e P é então a distância de qualquer ponto de R_2, por exemplo $(2,2,1)$, a P. Usando a fórmula que dá a distância de um ponto a um plano, obtemos o valor da distância pretendida, que é $2\sqrt{6}/3$.

4. (a) Procedemos por indução sobre n. Para $n=1$, nada há a mostrar. Suponhamos a afirmação verdadeira para matrizes simétricas reais $(n-1)\times(n-1)$ e seja A simétrica real $n\times n$. Seja v_1 um vector próprio de A, com norma 1, associado a um valor próprio λ_1. Acrescentemos a v_1 vectores $v_2,\ldots,v_n$ de modo a obter uma base ortonormada de $\mathbb{R}^n$ e seja W a matriz $n\times n$ ortogonal cujas colunas são $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Tem-se
$$AW = [Av_1\ Av_2\ \cdots\ Av_n] = [\lambda_1 v_1\ Av_2\ \cdots\ Av_n]$$
vindo
$$W^TAW = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix} [\lambda_1 v_1\ Av_2\ \cdots\ Av_n] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$
onde A_1 é $(n-1)\times(n-1)$ e simétrica. Pela hipótese de indução, existe uma matriz $(n-1)\times(n-1)$ Q_1 ortogonal tal que $Q_1^T A_1 Q_1$ é diagonal. Pomos agora
$$Q = W\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix}.$$
Então Q é ortogonal, por ser o produto de duas matrizes ortogonais, e tem-se que o produto Q^TAQ é igual a
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1^T \end{bmatrix} W^TAW \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & Q_1^TA_1Q_1 \end{bmatrix}$$
que é uma matriz diagonal.

(b) Os valores próprios da martiz indicada são $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ e -1.
Calculando vectores próprios ortonormados associados a estes valores próprios, obtemos uma matriz diagonalizante ortogonal para a matriz indicada, por exemplo
$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

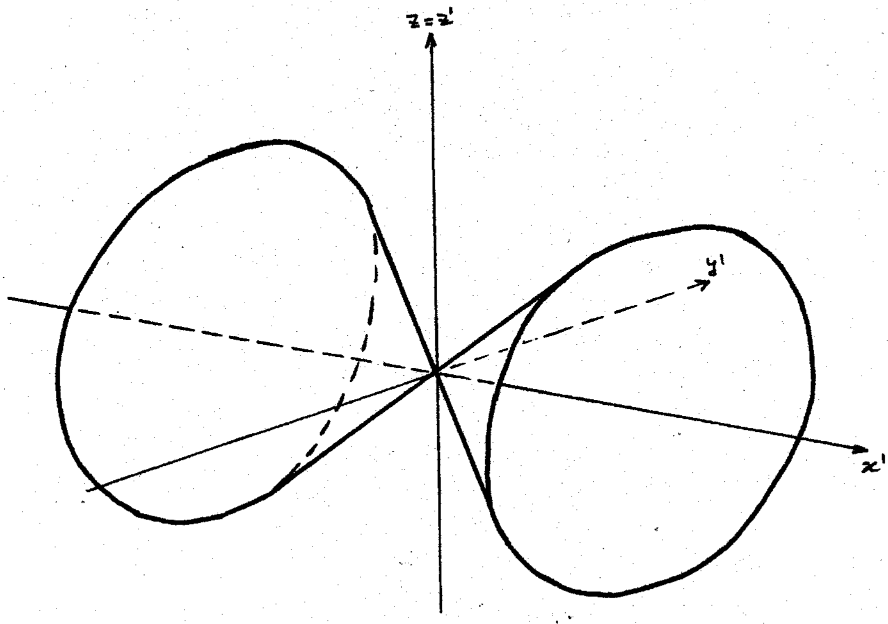
(c) Introduzindo a mudança de coordenadas dada por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

a equação fica

$$\frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 - z'^2 = 0$$

que é a equação de uma superfície cónica.



5. (a) Não existe nenhum valor de α tal que T seja injectiva, porque $\mathbb{R}_2[\lambda]$ tem dimensão 3 e $\mathbb{R}^2$ tem dimensão 2, pelo que o núcleo de T tem dimensão ≥ 1 qualquer que seja α. Por outro lado, T é sobrejectiva para todos os valores de α, porque os vectores $(1,0)$ e $(0,-1)$, que são independentes, pertencem a $C(T)$, que tem portanto dimensão ≥ 2; como $C(T)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$, tem que coincidir com $\mathbb{R}^2$.

(b) Como $(1,0) = (1,1) - \frac{1}{2}(0,2)$ e $(0,-1) = -\frac{1}{2}(0,2)$, a matriz pedida é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Cotação:

1. (*a*) 1	2. (*a*) 1	3. (*a*) 1,5	4. (*a*) 1,5	5. (*a*) 2
(*b*) 1	(*b*) 1	(*b*) 1,5	(*b*) 1,5	(*b*) 1,5
(*c*) 1,5	(*c*) 1	(*c*) 1,5	(*c*) 1,5	
	(*d*) 1			