Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica II

(Licenciatura em Matemática)

Exame e Resolução, 20/1/2004

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Considere o seguinte subconjunto de $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$:

$$W = \left\{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{K}) \mid A^T = A\right\}.$$

   (a) Prove que W é subespaço de $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$.

   (b) Indique uma base de W e a dimensão deste subespaço.

   (c) Determine um subespaço U de $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ tal que $M_{2\times 2}(\mathbb{K}) = W \oplus U$, i.e. tal que que $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ seja soma directa de U com W.

2. Seja (v_1, v_2, v_3, v_4) uma base dum espaço vectorial real V. Considere a transformação linear $T\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(v_1) = (1,0,0), \quad T(v_2) = T(v_3) = (1,1,1) \quad \text{e} \quad T(v_4) = (-1,1,0).$$

   (a) Escreva a matriz de T relativamente à base (v_1, v_2, v_3, v_4) de V e à base $((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Calcule uma base de $\operatorname{Ker} T$.

   (c) Diga, justificando, se T é ou não sobrejectiva.

   (d) Seja W um espaço real diferente de $\{0\}$. Suponha que existe uma transformação linear injectiva $S\colon W \longrightarrow V$ tal que $T \circ S = 0$. Mostre que W é isomorfo a $\mathbb{R}$.

3. Considere a seguinte matriz de $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine os valores próprios de A.

   (b) Sem calcular uma base de $N(A)$ e usando o resultado da alínea (a) mostre que $\dim N(A) = 1$.

   (c) Determine uma base para cada espaço próprio de A.

   (d) Diga, justificando, se A é uma matriz diagonalizável.

4. Considere a figura geométrica de $\mathbb{R}^2$ de equação $f(x,y) = 1$, onde

$$f(x,y) = xy + x$$

   (a) Identifique a parte quadrática de $f(x,y)$ e calcule a matriz simétrica $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ associada a essa parte quadrática.

   (b) Determine uma mudança ortogonal de coordenadas (de x, y para x', y') que diagonalize a matriz A.

   (c) Identifique a figura geométrica em questão. [Não precisa de a esboçar.]

   (d) Seja A a matriz achada na alínea (a). Diga, justificando, se a aplicação bilinear $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi((x,y),(s,t)) \;=\; \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$$

   é ou não um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Resolução

1. (a) W é não vazio. Por exemplo $I = \left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right] \in W$. Uma vez que se tem $(A+B)^T = A^T + B^T$ e $(\alpha A)^T = \alpha A^T$, deduz-se que $A, B \in W \Longrightarrow A+B \in W$ e que $(A \in W \text{ e } \alpha \in \mathbb{K}) \Longrightarrow \alpha A \in W$.

   (b) Temos $W = \left\{ \left[\begin{smallmatrix}\alpha&\beta\\\beta&\delta\end{smallmatrix}\right] \mid \alpha,\beta,\delta \in \mathbb{K} \right\} = \{\alpha \left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right] + \beta \left[\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right] + \delta \left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right] \mid \alpha,\beta,\delta \in \mathbb{K}\}$. Assim, concluimos que $\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]$ formam um conjunto de geradores de W. É evidente que

$$\mu \left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right] + \nu \left[\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right] + \gamma \left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right] = 0 \Longrightarrow \mu, \nu, \gamma = 0,$$

   i.e. que $\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]$ são linearmente independentes. Concluimos que $(\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right])$ é uma base de W. Logo, a dimensão de W é 3.

   (c) Seja $U = \mathcal{L}\{\left[\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right]\}$. U é um subespaço de $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$. Temos $A \in W \cap U \Longrightarrow A = \left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right]$ o que significa que $W \cap U \subset \{\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right]\}$, ou seja $W \cap U = \{\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right]\}$. Para além disto, usando a alínea (b),

$$W + U = \mathcal{L}\{\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right]\} = M_{2\times 2}(\mathbb{K}).$$

2. (a) Temos

$$\begin{cases} T(v_1) = (1,0,0) = 1(1,0,0) + 0(0,1,1) + 0(1,1,1), \\ T(v_2) = T(v_3) = (1,1,1) = 0(1,0,0) + 0(0,1,1) + 1(1,1,1), \\ T(v_4) = (1,1,1) = -2(1,0,0) + 1(0,1,1) + 0(1,1,1). \end{cases}$$

   e portanto as cordenadas de $T(v_1), T(v_2), T(v_3), T(v_4)$ na base $(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)$ são, respectivamente, $\left[\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix}-2\\1\\0\end{smallmatrix}\right]$. A matriz da transformação T relativamente à base (v_1, v_2, v_3, v_4) de V e à base $((1,0,0)(1,1,0)(1,1,1))$ de $\mathbb{R}^3$ é, por definição, a matriz cujas colunas (por ordem) são as coordenadas das imagens de v_1, v_2, v_3, v_4 na base $((1,0,0), (1,1,0), (1,1,1))$. Assim

$$M(T; (v_i), ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (b)

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} T &= \{v \in V \mid T(v) = 0\} \\ &= \{\alpha v_1 + \beta v_2 + \delta v_3 + \gamma v_4 \mid \alpha(1,0,0) + \beta(1,1,1) + \delta(1,1,1) + \gamma(-1,1,0) = 0\} \\ &= \{\alpha v_1 + \beta v_2 + \delta v_3 + \gamma v_4 \mid (\alpha + \beta + \delta - \gamma, \beta + \delta + \gamma, \beta + \delta) = 0\} \\ &= \{\alpha v_1 + \beta v_2 + \delta v_3 + \gamma v_4 \mid \alpha, \gamma, \beta + \delta = 0\} \\ &= \mathcal{L}\{v_2 - v_3\} \end{aligned}$$

   . E uma vez que $v_2 - v_3 \neq 0$ (já que (v_1, v_2, v_3, v_4) é base de V) uma base de $\operatorname{Ker} T$ é $(v_2 - v_3)$.

   (c) Pela alínea anterior, $\dim \operatorname{Ker} T = 1$; e se usarmos a formula $\dim V = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T$, resulta que $\dim \operatorname{Im} T = 4 - 1 = 3$, ou seja $\dim \operatorname{Im} T = \dim \mathbb{R}^3$. Atendendo a $\operatorname{Im} T \subset \mathbb{R}^3$ temos $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^3$. Portanto T é sobrejectiva.

   (d) Como S é uma transformação linear injectiva, tem-se $\operatorname{Ker} S = \{0\}$, e logo $\dim \operatorname{Ker} S = 0$, pelo que $\dim W = \dim \operatorname{Im} S$. Por outro lado

$$v \in \operatorname{Im} S \Longrightarrow v = S(w) \text{ para certo } w \in W \text{ e}$$
$$v = S(w) \Longrightarrow T(v) = T \circ S(w) = 0$$

   o que implica que $\operatorname{Im} S \subset \operatorname{Ker} T$. Assim $\dim W \leqslant \dim \operatorname{Ker} T = 1$. Uma vez que $\dim W \neq 0$ (já que $W \neq \{0\}$) só resta a possibilidade de $\dim W$ ser 1. Finalmente, como $\dim W = 1$, W e $\mathbb{R}$ têm a mesma dimensão, e portanto são isomorfos.

3. (a) Temos

$$P_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda((2-\lambda)(-\lambda) + 1) = -\lambda(1-\lambda)^2.$$

E assim, os valores próprios de A são 0 e 1. As suas multiplicidades algébricas são:

$$\mathrm{m}_a(0) = 1 \text{ e } \mathrm{m}_a(1) = 2.$$

(b) O espaço próprio do 0, $E(0)$, é por definição $N(A - 0I) = N(A)$ logo $\dim N(A) = \mathrm{m}_g(0)$ (multiplicidade geométrica de 0). Uma vez que $1 \leqslant \mathrm{m}_g(0) \leqslant \mathrm{m}_a(0) = 1$ temos $\dim N(A) = 1$.

(c) Temos $E(0) = N \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ e uma vez que

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

temos $E(1) = N(A - I) = N \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

(d) A matriz A é diagonalizável se e só se existe uma base de vectores próprios. Uma vez que vectores próprios associados a valores próprios distintos são linearmente independentes, equivalentemente, uma vez que os espaços próprios de uma matriz estão em soma directa, sabemos que A é diagonalizável se e só se $\dim E(0) + \dim E(1) = 3$. Tal não é verdade, logo A não é diagonalizável.

4. (a) A parte quadrática de $f(x, y)$ é xy e a matriz simétrica a ela associada é a matriz A tal que

$$xy = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ou seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Temos $P_A(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{4}$ e assim os valores próprios da matriz A são $\pm\frac{1}{2}$ (com multiplicidade algébrica 1). Ao calcular os espços próprios de A, $E(\frac{1}{2}) = \mathcal{L}\{[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}]\}$ e $E(-\frac{1}{2}) = \mathcal{L}\left\{\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]\right\}$ deduzimos que $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ são vectores próprios de A de norma 1 associados a valores próprios distintos, e como tal, ortogonais. A matriz $Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal (uma vez que as suas colunas são ortonormadas) e diagonaliza a matriz A, i.e. $Q^T A Q = D = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Concluimos que a mudança de coordenadas ortogonal que diagonaliza A é dada por $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = Q^T [\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}] = Q^T X$.

(c) Mantemos a notação da alínea anterior para X, X', Q e D. Temos

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(x, y) & = & X^T A X + [\,1\;0\,]\, X \\ & = & X^T Q D Q X + [\,1\;0\,]\, X \\ & & \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} f(x', y') & = & X'^T D X' + [\,1\;0\,]\, Q X' \\ & = & \frac{1}{2} x'^2 - \frac{1}{2} y'^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' \\ & = & \frac{1}{2}(x' + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - \frac{1}{2}(y' - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 \end{array} \right\}.$$

Conclui-se que $f(x, y) = 1 \Longleftrightarrow f(x', y') = 1$ é a equação de uma hipérbole.

(d) Apesar de φ ser uma aplicação bilinear que satisfaz a $\varphi((x, y), (s, t)) = \varphi((s, t), (x, y))$ (uma vez que A é simétrica) φ não é um produto interno. Isto é evidente se usarmos o resultado que diz que nessa situação A teria que ter todos os seus valores próprios positivos; mas é também claro usando a expressão de $\varphi((x, y), (x, y))$. De facto $\varphi((1, -1), (1, -1)) < 0$.

Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica II

(Licenciatura em Matemática)

Exame e Resolução, 9/2/2004

1. Seja $\mathbb{K}$ um corpo arbitrário. Considere o seguinte subconjunto de $\mathbb{K}^3$:

$$W = \{(1, \alpha+\beta, -\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}.$$

   (a) Mostre que W não é subespaço de $\mathbb{K}^3$.

   (b) Determine três vectores $v_1, v_2, v_3 \in W$ linearmente independentes.

   (c) Mostre que $\mathcal{L}(W) = \mathbb{K}^3$.

2. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ a transformação linear definida por $T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

   (a) Sem calcular uma base de $\operatorname{Ker} T$, determine $\dim \operatorname{Ker} T$.

   (b) Calcule a matriz de T relativamente à base $((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ e à base canónica de $\mathbb{R}$.

   (c) Determine uma base de $\operatorname{Ker} T$.

   (d) Determine um subespaço $U \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} T \oplus U$.

3. Considere a seguinte matriz de $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (a) Determine os valores próprios e os espaços próprios de A.

   (b) Determine uma matriz S tal que $S^{-1}AS$ é uma matriz diagonal e calcule explicitamente a sua inversa S^{-1}.

   (c) Calcule A^{2004}.

   (d) Mostre que se S e R são duas matrizes invertíveis tais que $S^{-1}AS = R^{-1}AR = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ então a matriz $S^{-1}R$ é diagonal de elementos diagonais não nulos.

4. Considere o polinómio $f(x,y,z) = 4x^2 + 4xy + y^2 - 8xz - 4yz + 4z^2$.

   (a) Identifique a matriz simétrica A associada a $f(x,y,z)$ e determine os valores próprios de A.

   (b) Determine uma base ortonormada de vectores próprios de A.

   (c) Identifique o conjunto $X \subset \mathbb{R}^3$ dado por

$$X = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 9\right\}.$$

   (d) Seja A a matriz achada na alínea (a). Diga, justificando, se a aplicação bilinear $\varphi\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(u,v) \;=\; \begin{bmatrix} u & u & u \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} v \\ v \\ v \end{bmatrix}$$

   é ou não um produto interno em $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Resolução}}$

1. (a) W não pode ser subespaço de $\mathbb{K}^3$ uma vez que o zero deste espaço $(0,0,0)$ não está em W. (Para qualquer corpo $\mathbb{K}$, por definição tem-se $0 \neq 1$.) $[\mathbf{1,0}]$

   (b) Consideremos os vectores $(1,0,0),(1,1,0),(1,1,-1) \in \mathbb{K}^3$ obtidos tomando respectivamente $\alpha=\beta=0$, $\alpha=1$ e $\beta=0$, $\alpha=0$ e $\beta=1$. $[\mathbf{0,5}]$
   Mostremos que estes vectores são linearmentente independentes. Sejam $a,b,c \in \mathbb{K}$ tais que
   $$a(1,0,0)+b(1,1,0)+c(1,1,-1)=0.$$
   Então $(a+b+c,b+c,-c)=0$ o que implica que $c=b=a=0$. Conclui-se que $(1,0,0),(1,1,0),(1,1,-1)$ são vectores linearmente independentes. $[\mathbf{0.5}]$

   (c) Sejam v_1,v_2,v_3 os vectores da alínea anterior. $\mathcal{L}(W)$ é um subespaço de $\mathbb{K}$ que contém $\mathcal{L}\{v_1,v_2,v_3\}$. $[\mathbf{0,5}]$
   Temos $\mathcal{L}\{v_1,v_2,v_3\} \subset \mathcal{L}(W) \subset \mathbb{K}^3$ e $\dim \mathcal{L}\{v_1,v_2,v_3\} = 3 = \dim \mathbb{K}^3$ uma vez que v_1,v_2,v_3 são linearmente independentes. $[\mathbf{0,5}]$
   Concluímos que $\mathcal{L}\{v_1,v_2,v_3\}=\mathbb{K}^3$ e logo $\mathcal{L}(W)=\mathbb{K}^3$. $[\mathbf{0,5}]$
   Erros comuns: Não ter em atenção a característica do corpo. Os vectores $(1,0,0),(1,1,0),(1,2,-2)$ não são linearmente independentes para corpos de característica 2; os vectores $(1,2,-1),(1,0,0),(1,-1,-1)$ não são linearmente independentes se a característica de $\mathbb{K}$ for 3.

2. (a) T é uma aplicação linear não nula e logo a sua imagem tem dimensão $\geqslant 1$. Uma vez que o espaço de chegada tem dimensão 1, deduz-se que T é sobrejectiva. $[\mathbf{1,0}]$
   Assim sendo, $\dim \operatorname{Ker} T = 3 - \dim \operatorname{Im} T = 2$. $[\mathbf{0,5}]$

   (b) Calculemos as imagens dos vectores da base do espaço de partida indicada: Temos $T(1,1,1)=3$, $T(1,1,0)=2$ e $T(1,0,0)=1$. Resulta que $M(T;((1,1,1)(1,1,0)(1,0,0)),\text{b.c.}) = [\ 3\ 2\ 1\ ]$. $[\mathbf{1,0}]$

   (c) $\operatorname{Ker} T = \big\{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0\big\} = \{(-\alpha_2-\alpha_3,\alpha_2,\alpha_3) \mid \alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}\} =$
   $= \mathcal{L}\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$. $[\mathbf{0,5}]$
   Verifiquemos que $(-1,1,0),(-1,0,1)$ são linearmente independentes. Sejam α e β números reais tais que
   $$\alpha(-1,1,0)+\beta(-1,0,1)=0.$$
   Então $(-\alpha-\beta,\alpha,\beta)=0$ ou seja $\alpha=\beta=0$. $[\mathbf{0,5}]$
   Logo $((-1,1,0),(-1,0,1))$ é base de $\operatorname{Ker} T$. $[\mathbf{0,5}]$

   (d) Seja $U=\mathcal{L}\{(1,0,0)\}$ (alternativas para U: $\mathcal{L}(0,1,0)$, $\mathcal{L}(0,0,1)$, etc. qualquer espaço da forma $\mathcal{L}\{v\}$ com $v \notin \operatorname{Ker} T$). $[\mathbf{0,5}]$
   Temos $T(1,0,0)\neq 0$, logo $(1,0,0) \notin \operatorname{Ker} T$ e assim sendo, $\operatorname{Ker} T \cap U = \{0\}$. $[\mathbf{0,5}]$
   Uma vez que $\dim \operatorname{Ker} T \oplus U = 2+1 = \dim \mathbb{R}^3$ e $\operatorname{Ker} T \oplus U \subset \mathbb{R}^3$ temos $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} T \oplus U$. $[\mathbf{0,5}]$

3. (a) Valores próprios:
   $$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)(-\lambda)$$
   logo os valores próprios de A são 1, -1 e 0 todos com multiplicidade algébrica 1. Alternativamente bastaria invocar o exercício das aulas práticas que mostra que os valores próprios duma matriz triangular são os elementos da sua diagonal. $[\mathbf{0,5}]$
   Espaços próprios: $E(1) = N\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$. $E(-1) = N\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$.
   $E(0) = N\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$. $[\mathbf{1,0}]$

   (b) S é uma matriz cujas colunas formem uma base de vectores próprios. E.g. $S=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. $[\mathbf{1,0}]$
   Cálculo de S^{-1}.
   $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$
   donde se conclui que $S^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. $[\mathbf{0,5}]$

(c) Seja S a matriz da alínea anterior. Temos $S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = D$, logo $SDS^{-1} = A$. Assim $A^{2004} = (SDS^{-1})^{2004} = \underbrace{(SDS^{-1}) \cdots (SDS^{-1})}_{\text{2004 vezes}} = SD^{2004}S^{-1}$. $\mathbf{[0,5]}$

$$SD^{2004}S^{-1} = S \begin{bmatrix} 1^{2004} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{2004} & 0 \\ 0 & 0 & 0^{2004} \end{bmatrix} S^{-1} = S \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \ \mathbf{[0,5]}$$

(d) Se S e R são tais que $S^{-1}AS = R^{-1}AR = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, então tanto S como R são matrizes cujas colunas são constituídas por vectores próprios associados a 1, -1 e 0 (por esta ordem). Uma vez que os espaços próprios têm dimensão 1 e tendo em atenção às bases calculadas na alínea (c), conclui-se que existem $a, b, c \neq 0$ e $d, e, m \neq 0$ tais que

$$S = \begin{bmatrix} a & -b & -5c \\ 0 & b & 2c \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R = \begin{bmatrix} d & -e & -5m \\ 0 & e & 2m \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$S^{-1}R = \begin{bmatrix} a & -b & -5c \\ 0 & b & 2c \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d & -e & -5m \\ 0 & e & 2m \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d/a & 0 & 0 \\ 0 & e/b & 0 \\ 0 & 0 & m/c \end{bmatrix}.$$

4. (a) A matriz simétrica associada ao polinómio quadrático $f(x,y,z)$ é $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$. $\mathbf{[1,0]}$

Temos

$$P_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)^2(1-\lambda) + 16 + 16 - 16(1-\lambda) - 4(4-\lambda) - 4(4-\lambda) = \lambda^2(9-\lambda).$$

Logo os valores próprios da matriz A são 9 com multiplicidade algébrica 1 e 0 com multiplicidade algébrica 2. $\mathbf{[0,5]}$

(b) O primeiro passo para a determinação duma base ortonormada de vectores próprios é o cálculo dos espaços próprios da matriz A. Temos

$$E(9) = N \begin{bmatrix} -5 & 2 & -4 \\ 2 & -8 & -2 \\ -4 & -2 & -5 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

e uma vez que $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ temos $E(0) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 2z-2x \\ z \end{bmatrix} \mid x, z \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. $\mathbf{[1,0]}$

O segundo passo consiste em usar o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt para obter uma base ortogonal de cada espaço próprio. Como $\dim E(9) = 1$, só é necessário ortogonalizar a base $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Designando estes vectores por v_1 e v_2, respectivamente, o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt dá-nos os vectores v_1 e $\widehat{v_2}$ onde $\widehat{v_2}$ é o vector

$$\widehat{v_2} = v_2 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, o último passo consiste em dividir cada um dos vectores próprios $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{bmatrix}$ pela
sua norma. Obtém-se a seguinte base ortormada: $\begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4/(3\sqrt{5}) \\ 2/(3\sqrt{5}) \\ 5/(3\sqrt{5}) \end{bmatrix}$. $\mathbf{[0,5]}$

(c) Quer pelos resultados da aula teórica quer pela alínea anterior sabemos que existe uma matriz ortogonal Q tal que $Q^TAQ = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tomando a mudança de coordenadas ortogonal (x', y', z') dada por Q temos

$$f(x,y,z) = 9 \iff f(x', y', z') = 9 \iff 9x'^2 = 9 \iff x' = \pm 1.$$

Ou seja, o conjunto X consiste em dois planos paralelos. $\mathbf{[1,0]}$

(c) Efectuando o produto de matrizes indicado, obtemos $\varphi(u,v) = uv$. $\mathbf{[0,5]}$
Portanto $\varphi(u,v)$ é o produto interno canónico de $\mathbb{R}$. É bilinear. $\mathbf{[0,5]}$
E é definido positivo. $\mathbf{[0,5]}$