Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica II

(Licenciatura em Matemática)

Prova Suplementar, 18/2/2004

1. Prove que toda a matriz real simétrica é diagonalizável com uma matriz diagonalizante ortogonal.

2. Seja V um espaço vectorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Seja F um subespaço de V. Para cada vector $v \in V$, denotamos por $v + F$ o conjunto
$$\{v + u \mid u \in F\}.$$
Denotemos por V/F o conjunto $\{v + F \mid v \in V\}$ (note que os elementos deste conjunto são eles próprios conjuntos). O primeiro objectivo deste exercício é mostrar que, para as operações convenientemente definidas, V/F é também um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.

   Sendo $v, w \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$, ponhamos
$$(v + F) + (w + F) = (v + w) + F$$
$$\alpha(v + F) = (\alpha v) + F.$$

   (a) Que lhe parecem estas definições?
   (b) Mostre que V/F imbuído destas operações é um espaço vectorial.
   (c) Suponha que V tem dimensão finita. Nessa situação enuncie e demonstre uma proposição descrevendo a dimensão de V/F. (E se V tiver dimensão infinita?)

   Considere a aplicação $P\colon V \longrightarrow V/F$ definida por $v \mapsto v + F$.

   (d) Mostre que P é linear, sobrejectiva e calcule $\operatorname{Ker} P$.

   Sejam W um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e $T\colon V \longrightarrow W$ uma aplicação linear.

   (e) Mostre que existe um isomorfismo $V/\operatorname{Ker} T \simeq \operatorname{Im} T$.

3. Sejam A, B, C, V, W, U espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$. Suponha que existem aplicações lineares T_1, T_2, T_3, S_1, S_2, R_1, R_2 como no diagrama seguinte:
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "S_1"] \arrow[d, "T_1"] & B \arrow[r, "S_2"] \arrow[d, "T_2"] & C \arrow[d, "T_3"] \\ V \arrow[r, "R_1"] & W \arrow[r, "R_2"] & U \end{tikzcd}$$
É dado que cada quadrado é comutativo (tal significa que em cada quadrado as duas composições possíveis dão a mesma aplicação linear) e que R_1 é injectiva, S_2 é sobrejectiva, $\operatorname{Im} S_1 = \operatorname{Ker} S_2$ e $\operatorname{Im} R_1 = \operatorname{Ker} R_2$.

   (a) Mostre que se T_1 e T_3 são sobrejectivas então T_2 é sobrejectiva.
   (b) Mostre que se T_1 e T_3 são injectivas então T_2 é injectiva.

4. Seja k um número inteiro positivo. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere $U_n \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$, i.e. considere uma sucessão de matrizes reais do tipo $k \times k$.

   (a) Como definiria o conceito de sucessão de matrizes convergente $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

   Seja A uma matriz real diagonalizável.

   (b) Determine uma condição necessária e suficiente para que a série $\sum_{n\geq 0} A^n$ seja convergente.
   (c) Calcule a soma da série da alínea anterior.