Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica II

1^o teste 12 de Novembro de 2003

Nome do estudante:

$\boxed{\text{Cotação : } 0,4+0,4+0,4+0,3}$

Seja V o subconjunto de $\mathbb{C}^2$ dado por:

$$V=\left\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2 \mid \mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2)\right\}.$$

1. Mostre que, considerando $\mathbb{C}^2$ como espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{C}$, V não é subespaço.
2. Mostre que, considerando $\mathbb{C}^2$ como espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{R}$, V é subespaço e determine uma base de V.
3. Sejam w_1,w_2,w_3 os vectores de uma base de V e considere a transformação linear $T\colon V\longrightarrow\mathbb{R}^3$ definida por:
$$T(\alpha w_1+\beta w_2+\gamma w_3)=(\alpha+\beta,\alpha-\beta,2\alpha+\gamma)$$
Determine a matriz que representa T relativamente à base w_1,w_2,w_3 de V e à base canónica de $\mathbb{R}^3$ e diga, justificando, se T é ou não sobrejectiva.
4. Determine $\mathrm{Ker}(T)$

$\boxed{\text{Resolução:}}$

Seja V o subconjunto de $\mathbb{C}^2$ dado por:

$$V = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)\right\}.$$

1. Mostre que, considerando $\mathbb{C}^2$ como espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{C}$, V não é subespaço.

   Solução : Consideremos $(1, 1+i) \in \mathbb{C}^2$ e $i \in \mathbb{C}$. Uma vez que $\mathrm{Re}(1) = 1 = \mathrm{Re}(1+i)$ temos $(1, 1+i) \in V$. Uma vez que $i(1, 1+i) = (i, -1+i)$ e $\mathrm{Re}(i) = 0 \neq -1 = \mathrm{Re}(-1+i)$, V não é fechado para a multiplicação por um escalar, logo V não é subespaço de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$.

2. Mostre que, considerando $\mathbb{C}^2$ como espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{R}$, V é subespaço e determine uma base de V.

   Solução : O conjunto V é não vazio ($(0,0) \in V$). É fechado para a adição e para a multiplicação ($(z_1, z_2), (w_1, w_2) \in V \Longrightarrow \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ e $\mathrm{Re}(w_1) = \mathrm{Re}(w_2)$. Logo $\mathrm{Re}(z_1 + w_1) = \mathrm{Re}(z_2 + w_2)$ donde $(z_1, z_2) + (w_1, w_2) \in V$. Adicionalmente, se $\alpha \in \mathbb{R}$ então $\mathrm{Re}(\alpha(z_1)) = \alpha \,\mathrm{Re}(z_1) = \alpha \,\mathrm{Re}(z_2) = \mathrm{Re}(\alpha z_2)$, logo $\alpha(z_1, z_2) \in V$). Concluimos que V é subespaço do espaço real $\mathbb{C}^2$. Tem-se

   $$V = \{(a+bi, a+ci) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}\{(1,1), (i,0), (0,i)\}$$

   e uma vez que $\alpha(1,1) + \beta(i,0) + \gamma(0,i) = 0$ (com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$) implica que $\alpha = \beta = \gamma = 0$, donde se conclui que $(1,1), (i,0), (0,i)$ são linearmente independentes, $(1,1), (i,0), (0,i)$ constituem uma base de V.

3. Sejam w_1, w_2, w_3 os vectores de uma base de V e considere a transformação linear $T\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

   $$T(\alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3) = (\alpha + \beta, \alpha - \beta, 2\alpha + \gamma)$$

   Determine a matriz que representa T relativamente à base w_1, w_2, w_3 de V e à base canónica de $\mathbb{R}^3$ e diga, justificando, se T é ou não sobrejectiva.

   Solução :

   $$A = M(T; (w_1, w_2, w_3), \text{b.c.}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Temos $\det(A) = 1 \cdot \det \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right] = -2 \neq 0$. Logo $\mathrm{car}(A) = 3$, donde $\dim \mathrm{Im}(T) = 3$ ou seja T é sobrejectiva.

4. Determine $\mathrm{Ker}(T)$

   Solução : Temos $\dim V = 3 = \dim \mathrm{Ker}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = \dim \mathrm{Ker}(T) + 3$, logo $\dim \mathrm{Ker}(T) = 0$ ou seja $\mathrm{Ker}(T) = (0)$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica II

2^o teste 17 de Dezembro de 2003

Nome do estudante:

$\boxed{\text{Cotação : } 0,4+0,3+0,4+0,4}$

Considere a seguinte matríz simétrica real:

$$A = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

1. Calcule os valores próprios de A.
2. Mostre que A é diagonalizável.
3. Determine uma base ortonormada de vectores próprios de A.
4. Determine uma matriz $B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $B^3 = A$.

$\boxed{\text{Resolução:}}$

Considere a seguinte matríz simétrica real:

$$A = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

1. Calcule os valores próprios de A.

   Solução : Calculemos o polinómio característico de A. $P_A(t) = \det(A - tI) = \det \begin{bmatrix} -1/3-t & 2/3 & 0 \\ 2/3 & -t & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3-t \end{bmatrix}$ $= (-\frac{1}{3} - t)(-t)(\frac{1}{3} - t) - \frac{4}{9}(-\frac{1}{3} - t) - \frac{4}{9}(\frac{1}{3} - t) = t(\frac{1}{9} - t^2) + \frac{8}{9}t = t - t^3$. Assim concluímos que os valores próprios de A, que são as raízes de $P_A(t)$, são 0, 1 e -1.

2. Mostre que A é diagonalizável.

   Solução : A matríz A é diagonalizável porque é uma matriz real simétrica. Outra solução (usando apenas o resultado da alínea anterior) poderia ser: A é diagonalizável se e só se existe uma base do espaço das matrizes coluna $M_{3\times1}(\mathbb{R})$ constituída por vectores própios de A. Da alínea (a) sabemos que existem 3 valores próprios distintos e pelo menos 1 vector próprio para cada valor próprio. Uma vez que vectores próprios associados a valores próprios diferentes são linearmente independentes existe uma base de $M_{3\times1}(\mathbb{R})$ formada por vectores próprios. Outras soluções passariam pelo cáculo directo dos espaços próprios associados a 0, 1 e -1 e verificação directa da independência linear.

3. Determine uma base ortonormada de vectores próprios de A.

   Solução : Uma vez que existem 3 valores próprios distintos e a matriz A tem dimensão 3, cada espaço próprio tem dimensão exactamente 1. Para calcular bases de cada espaço próprio basta exibir um vector próprio associado a cada valor próprio. Temos

$$(\mathbb{R}^3)_0 = N \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right\}, \quad (\mathbb{R}^3)_1 = N \begin{bmatrix} -4/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & -1 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right\},$$

$$(\mathbb{R}^3)_{-1} = N \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 1 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 4/3 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

   Uma vez que vectores próprios associados a valores próprios distintos são ortogonais, para obter uma base ortonormada basta dividir cada vector próprio acima pela sua norma. Assim uma base ortonormada de vectores próprios de A é: $\left(\begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}\right)$.

4. Determine uma matriz $B \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ tal que $B^3 = A$.

   Solução : Seja Q a matriz cujas colunas são a base determinada em (c). Sabemos que, por aquela base ser ortonormada, a matriz Q é ortogonal. Para além disso, uma vez que se trata de uma base de vectores próprios de A, temos $Q^TAQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = D$. Uma vez que $D^3 = D$ temos $(Q^TAQ)^3 = D^3 \iff Q^TA^3Q = D \iff A^3 = QDQ^T \iff A^3 = A$. Assim podemos tomar $B = A$.