Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica II

(Licenciatura em Matemática)

Exame, 17/01/2005

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Seja $\mathbb{K}$ um corpo arbitrário e $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ uma matriz arbitrária, mas fixa, sobre $\mathbb{K}$. Considere o seguinte subconjunto de $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$:
$$W = \{X \in M_{2\times 2}(\mathbb{K}) \mid AX = XA\}.$$
   (a) Mostre que W é subespaço de $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$.
   (b) Mostre que $\dim W = 2$ se A não for triangular.
   (c) Supondo que $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, calcule uma base de W e indique a dimensão deste subespaço.

2. Seja V um espaço real e $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de V. Considere a transformação linear $T\colon V \longrightarrow V$ dada por
$$T(e_1) = e_1, \quad T(e_1 + e_2) = e_2 \ \text{ e } \ T(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2.$$
   (a) Calcule uma base de $\operatorname{Ker} T$.
   (b) Calcule uma base de $\operatorname{Im} T$.
   (c) Considere $\varphi\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por
$$\varphi(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3) = 2\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2 + 4\alpha_3\beta_3.$$
   Mostre que φ é um produto interno em V.
   (d) Calcule uma base do complemento ortogonal de $\operatorname{Ker} T$ relativamente ao produto interno referido na alínea anterior.

3. Considere a seguinte matriz: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
   (a) Calcule os valores próprios de A.
   (b) Determine os espaços próprios de A, indicando bases para eles.
   (c) Diga, justificando, se A é ou não uma matriz diagonalizável.
   (d) Indique uma matriz S, invertível, tal que $S^{-1}AS = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

4. Considere a figura geométrica de $\mathbb{R}^3$ de equação $f(x,y,z) = 1$, onde
$$f(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz.$$
   (a) Identifique a matriz simétrica $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $f(x,y,z) = X^T AX$, onde $X = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right]$.
   (b) Determine uma mudança ortogonal de coordenadas que diagonalize A.
   (c) Identifique a figura geométrica em questão.

1. Seja $\mathbb{K}$ um corpo arbitrário e $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ uma matriz arbitrária, mas fixa, sobre $\mathbb{K}$. Considere o seguinte subconjunto de $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$:

$$W = \{X \in M_{2\times 2}(\mathbb{K}) \mid AX = XA\}.$$

   (a) Mostre que W é subespaço de $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$.

   Solução: Para mostrar que um sobconjunto é subespaço de um certo espaço vectorial é necessário verificar três axiomas: que esse subconjunto é não-vazio, que ele é fechado para a adição do espaço vectorial e que ele é fechado para a multiplicação escalar do espaço vectorial.

   Que W é diferente do vazio. Como sempre, basta verificar que o zero de $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$, que é a matriz nula, pertence a W. Tal é verdade pois $A0 = 0 = 0A$. Mas no caso de W, verifica-se ainda que $AA = A^2 = AA$ e que $AI = A = IA$ e portanto à partida temos $A, I, 0 \in W$. Claro que pode suceder que $A = 0$ ou que $A = I$ e portanto, sem considerações adicionais, podemos apenas dizer que W tem pelo menos dois elementos.

   Que W é fechado para a adição. Sejam $X, Y \in W$. Tal significa que $AX = XA$ e que $AY = YA$. Temos, portanto, $A(X+Y) = AX+AY$ (distributiva do produto de matrizes), $AX+AY = XA+YA$ (por hipótese) e $XA+YA = (X+Y)A$ (novamente a distributiva). Assim, $A(X+Y) = (X+Y)A$, ou seja, $X+Y \in W$.

   Que W é fechado para a multiplicação escalar. Seja $X \in W$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Por hipótese, $AX = XA$, logo $\alpha(XA) = \alpha(AX)$, e aplicando a lei do salto, $(\alpha X)A = A(\alpha X)$. Isto é, $\alpha X \in W$.

   (b) Mostre que $\dim W = 2$ se A não for triangular.

   Solução: Já vimos que $A, I \in W$. Se A não é triangular superior então A, I são linearmente independentes, logo $\dim W \geq 2$. Consideremos o subespaço gerado pelas matrizes $[2\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}]$ e $[\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}]$. Trata-se de um subespaço de dimensão 2 que denotaremos por U.

   Da fórmula para a dimensão da soma de subespaços temos

$$4 \geq \dim(W+U) = \dim W + 2 - \dim(W \cap U)$$

   Calculemos explicitamente a intersecção $W \cap U$. A matriz A é da forma $\left[\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right]$ onde $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. Se $X \in W \cap U$ então $X = \left[\begin{smallmatrix}\alpha&\beta\\0&0\end{smallmatrix}\right]$ para certos $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, pois $X \in U$, e, como $X \in W$, temos também $XA = AX$, ou seja $\left[\begin{smallmatrix}\alpha a+\beta c&\alpha b+\beta d\\0&0\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}\alpha a&\beta a\\\alpha c&\beta c\end{smallmatrix}\right]$. Uma vez que A não é triangular, e logo $c \neq 0$, conclui-se que $\alpha = \beta = 0$, donde $\dim(W \cap U) = 0$. E assim, da desigualdade acima resulta que $\dim W \leq 2$. Como já mostrámos que $\dim W \geq 2$ temos portanto, $\dim W = 2$.

   (c) Supondo que $A = [\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}]$, calcule uma base de W e indique a dimensão deste subespaço.

   Solução: Temos

$$W = \left\{X = \left[\begin{smallmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{smallmatrix}\right] \in M_{2\times 2}(\mathbb{K}) \mid \left[\begin{smallmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{smallmatrix}\right][\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}] = [\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}]\left[\begin{smallmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{smallmatrix}\right]\right\} =$$
$$= \left\{\left[\begin{smallmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{smallmatrix}\right] \in M_{2\times 2}(\mathbb{K}) \mid \left[\begin{smallmatrix}\alpha&\alpha+\beta\\\gamma&\gamma+\delta\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}\alpha+\gamma&\beta+\delta\\\gamma&\delta\end{smallmatrix}\right]\right\} = \left\{\left[\begin{smallmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{smallmatrix}\right] \in M_{2\times 2}(\mathbb{K}) \mid \gamma = 0 \text{ e } \alpha = -\delta\right\} =$$
$$= \left\{\left[\begin{smallmatrix}-\delta&\beta\\0&\delta\end{smallmatrix}\right] \in M_{2\times 2}(\mathbb{K}) \mid \beta, \delta \in \mathbb{K}\right\} = \left\{\beta[\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}] + \delta\left[\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right] \mid \beta, \delta \in \mathbb{K}\right\} = \mathscr{L}\left\{[\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}], \left[\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]\right\}.$$

   Uma vez que nenhuma das matrizes do conjunto de geradores é múltipla da outra este conjunto é uma base de W. Desta forma, $\dim W = 2$.

2. Seja V um espaço real e $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de V. Considere a transformação linear $T\colon V \longrightarrow V$ dada por

$$T(e_1) = e_1, \quad T(e_1 + e_2) = e_2 \text{ e } T(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2.$$

(a) Calcule uma base de $\operatorname{Ker} T$.

Solução: Da definição, temos $\operatorname{Ker} T = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$. Uma vez que $\{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3\}$ constitui outra base de V (sabê-mo-lo das aulas práticas) temos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} T &= \{\alpha e_1 + \beta(e_1 + e_2) + \gamma(e_1 + e_2 + e_3) \in V \mid T(\alpha e_1 + \beta(e_1 + e_2) + \gamma(e_1 + e_2 + e_3)) = 0\} = \\
&= \{\alpha e_1 + \beta(e_1 + e_2) + \gamma(e_1 + e_2 + e_3) \in V \mid \alpha T(e_1) + \beta T(e_1 + e_2) + \gamma T(e_1 + e_2 + e_3) = 0\} = \\
&= \{\alpha e_1 + \beta(e_1 + e_2) + \gamma(e_1 + e_2 + e_3) \in V \mid \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma(e_1 + e_2) = 0\} = \\
&= \{\alpha e_1 + \beta(e_1 + e_2) + \gamma(e_1 + e_2 + e_3) \in V \mid (\alpha + \gamma)e_1 + (\beta + \gamma)e_2 = 0\} = \\
&\overset{\star}{=} \{\alpha e_1 + \beta(e_1 + e_2) + \gamma(e_1 + e_2 + e_3) \in V \mid \alpha = -\gamma \text{ e } \beta = -\gamma\} = \\
&= \{-\gamma e_1 - \gamma(e_1 + e_2) + \gamma(e_1 + e_2 + e_3) \in V \mid \gamma \in \mathbb{R}\} = \\
&= \{-\gamma e_1 + \gamma e_3 \in V \mid \gamma \in \mathbb{R}\} = \mathscr{L}\{e_3 - e_1\}
\end{aligned}$$

Onde na igualdade $(\star)$ usámos a independência linear de $\{e_1, e_2, e_3\}$.

(b) Calcule uma base de $\operatorname{Im} T$.

Solução: Sabemos que as imagens dos elementos de uma base de V constituem um conjunto de geradores de $\operatorname{Im} T$. Uma vez que $\{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3\}$ é uma base de V temos

$$\operatorname{Im} T = \mathscr{L}\{e_1, e_2, e_1 + e_2\} = \mathscr{L}\{e_1, e_2\}.$$

Assim, $\{e_1, e_2\}$ é uma base de $\operatorname{Im} T$.

(c) Considere $\varphi\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3) = 2\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2 + 4\alpha_3\beta_3.$$

Mostre que φ é um produto interno em V.

Solução: Sejam $y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$, $x_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ e $x_2 = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3$ vectores de V. Há que verficar quatro propriedades.

<u>$\varphi(x_1, y) = \varphi(y, x_1)$</u>

$$\varphi(x_1, y) = 2\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2 + 4\alpha_3\beta_3 = 2\beta_1\alpha_1 + 3\beta_2\alpha_2 + 4\beta_3\alpha_3 = \varphi(y, x_1).$$

<u>$\varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$</u>

$$\begin{aligned}
&\varphi(x_1 + x_2, y) = 2(\alpha_1 + \gamma_1)\beta_1 + 3(\alpha_2 + \gamma_2)\beta_2 + 4(\alpha_3 + \gamma_4)\beta_3 = \\
&= (2\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2 + 4\alpha_3\beta_3) \; + \; (2\gamma_1\beta_1 + 3\gamma_2\beta_2 + 4\gamma_3\beta_3) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y).
\end{aligned}$$

<u>$\varphi(\mu x_1, y) = \mu\varphi(x_1, y)$, com $\mu \in \mathbb{R}$</u>

$$\varphi(\mu x_1, y) = 2\mu\alpha_1\beta_1 + 3\mu\alpha_2\beta_2 + 4\mu\alpha_3\beta_3 = \mu(2\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2 + 4\alpha_3\beta_3) = \mu\varphi(x_1, y).$$

<u>$\varphi(y, y) \geq 0$ e $\varphi(y, y) = 0 \Longleftrightarrow y = 0$</u>

Uma vez que $\varphi(y, y) = 2\beta_1^2 + 3\beta_2^2 + 4\beta_3^2$ temos $\varphi(y, y) \geq 0$. Para além disto $\varphi(y, y) = 0$ se e só se $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, i.e., se e só se $y = 0$.

(d) Calcule uma base do complemento ortogonal de $\operatorname{Ker} T$ relativamente ao produto interno referido na alínea anterior.

Solução: Por definição $(\operatorname{Ker} T)^{\perp} = \{v \in V \mid \varphi(v,u) = 0,\ \forall u \in \operatorname{Ker} T\}$. Como $\operatorname{Ker} T = \{e_3 - e_1\}$, temos:

$$\begin{aligned}(\operatorname{Ker} T)^{\perp} &= \{v \in V \mid \varphi(v, e_3 - e_1) = 0\} = \{v = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \in V \mid \varphi(v, e_3 - e_1) = 0\} = \\ &= \{\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \in V \mid \varphi(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3, -e_1 + 0 \cdot e_2 + e_3) = 0\} = \\ &= \{\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \in V \mid -2\alpha + 4\gamma = 0\} = \\ &= \{2\gamma e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \in V \mid \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} = \mathscr{L}\{2e_1 + e_3, e_2\}.\end{aligned}$$

É fácil verificar que $2e_1 + e_3$ e e_2 são linearmente independentes. Portanto, $\{2e_1 + e_3, e_2\}$ é uma base de $(\operatorname{Ker} T)^{\perp}$.

3. Considere a seguinte matriz: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule os valores próprios de A.

Solução: Sabemos que os valores próprios são os zeros do polinómio $\det(A - \lambda I)$. Temos

$$\det(A-\lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} == (2-\lambda)(2-\lambda)(-\lambda) + (2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (2-\lambda)(\lambda-1)^2.$$

Portanto, os valores próprios de A são o 2 com multiplicidade algébrica 1, e o 1 com multiplicidade algébrica 2.

(b) Determine os espaços próprios de A, indicando bases para eles.

Solução: Por definição, o espaço próprio associado a um valor próprio λ é dado por $N(A - \lambda)$. Assim,

$$E(2) = N \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \mathscr{L}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ e}$$

$$E(1) = N \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x = 0 \text{ e } y = z \right\} = \mathscr{L}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(c) Diga, justificando, se A é ou não uma matriz diagonalizável.

Solução: Uma matriz A de tipo $n \times n$ é diagonalizável se e só se

$$n = \dim E(\lambda_1) + \cdots + \dim E(\lambda_k),$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ são os valores próprios de A. (Aqui $k \leq n$, i.e. não é necessário que $k = n$. Dizer que A é diagonalizável se e <u>só se</u> tiver n valores próprios é um <u>erro</u> comum!) Para a matriz A deste problema, verifica-se que $\dim E(2) + \dim E(1) = 2 < 3$, logo A não é diagonalizável.

(d) Indique uma matriz S, invertível, tal que $S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Solução: Para resolver este exercício basta seguir o primeiro passo da demonstração do teorema que diz que todas as matrizes simétricas são diagonalizáveis. (Claro que o teorema aqui não se aplica pois A não é simétrica.) Consideramos em primeiro lugar um vector próprio associado a 2. Tomamos $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. A ideia da demonstração é estender este vector a uma base de $\mathbb{R}^3$. Para além disso, no caso presente, é preciso que a matriz S, cujas colunas são os elementos dessa base (fixando a ordem em que são dados), seja tal que a operação $A \mapsto S^{-1}AS$ preserve a submatriz 2×2 do canto inferior direito de A. Uma forma de satisfazer esta condição é colocar na matriz S a matriz $I_{2\times 2}$ no canto inferior direito. Neste caso isto é compatível com a extensão de $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ a uma base de $\mathbb{R}^3$, já que este vector não pertence ao espaço gerado por $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Finalmente, e de acordo com o que foi dito, consideremos a seguinte matriz, $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, com inversa $S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, cujo cálculo deixamos ao cuidado do leitor. Verifiquemos que S é solução do problema:

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Considere a figura geométrica de $\mathbb{R}^3$ de equação $f(x, y, z) = 1$, onde

$$f(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz.$$

(a) Identifique a matriz simétrica $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $f(x, y, z) = X^T AX$, onde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

Solução: A é a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Determine uma mudança ortogonal de coordenadas que diagonalize A.

Solução: O processo de achar uma mudança ortogonal de coordenadas que diagonalize a matriz A é composto por 3 passos. Em primeiro lugar determinam-se os valores próprios de A (que podem ser em número inferior a 3); de seguida calculam-se bases para cada espaço próprio e finalmente, para cada espaço próprio, determina-se uma sua base ortonormada. O objectivo é encontrar uma base ortonormada de vectores próprios do espaço das matrizes-coluna $\mathbb{R}^3$.

Calculemos os valores próprios da matriz A. Temos

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 2 + 3\lambda = (\lambda + 1)(-\lambda^2 + \lambda + 2) = (\lambda + 1)(1 + \lambda)(2 - \lambda),$$

logo, os valores próprios de A são -1 e 2. De seguida determinamos bases dos espaços próprios.

$$E(2) = N \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \mathscr{L}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad E(-1) = N \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathscr{L}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Finalmente determinamos bases ortonormadas para cada um destes espaços próprios. No primeiro caso basta dividir pela norma do vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Temos portanto,

$$E(2) = \mathscr{L}\left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Já no caso de $E(-1)$, uma vez que este espaço tem dimensão superior a 1 é necessário usar o método de ortogonalização de Gram-Schmidt. Seja $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. O método permite determinar uma base ortogonal $\{u_1, u_2\}$ a partir de $\{v_1, v_2\}$ da seguinte forma: em primeiro lugar faz-se $u_1 = v_1$, de seguida define-se:

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

Uma vez obtida uma base ortogonal para obter uma base ortonormada, basta dividir cada vector desta base pela sua norma. Obtemos

$$E(-1) = \mathscr{L}\left\{ \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/3 \\ -\sqrt{6}/6 \end{bmatrix} \right\}$$

Finalmente a matriz ortogonal, que representa a mudança ortogonal de coordenadas é dada por:

$$Q = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3}/3 & 0 & \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 \end{bmatrix}.$$

(c) Identifique a figura geométrica em questão.

Solução: De acordo com o resultado da alínea anterior, sabemos que, sendo $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ e $X = QX'$,

$$X^T AX = (QX')^T A(QX') = X'^T \left(Q^T AQ\right) X' = 2(x')^2 - (y')^2 - (z')^2$$

Assim, $f(x, y, z) = 1 \iff 2(x')^2 - (y')^2 - (z')^2 = 1$. Conclui-se que a figura geométrica dada por $f(x, y, z) = 1$ é um hiperbolóide de duas folhas.

FIM

Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica II

(Licenciatura em Matemática)

Exame de recurso, 11/02/2005

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Seja V um espaço de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ e F um subespaço de V. Considere o seguinte subconjunto de $V \times V$:
$$W = \{(v, w) \in V \times V \mid v - w \in F\}.$$
   (a) Mostre que W é subespaço de $V \times V$.
   (b) Mostre que $\dim W = \dim V + \dim F$.
   (c) Suponha que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$ e $F = \mathscr{L}\{(1,1,1)\}$. Calcule uma base de W e indique a dimensão deste subespaço.

2. Considere a transformação linear $T \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x + z, y - x, y + z)$.
   (a) Calcule uma base de $\operatorname{Ker} T$.
   (b) Diga, justificando, se T é ou não sobrejectiva.
   (c) Escreva a matriz que representa a transformação T relativamente à base do domínio $\{(1,1,1), (0,1,0), (1,0,-1)\}$ e à base do contradomínio $\{(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)\}$.
   (d) Determine um subespaço W de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = W \oplus \operatorname{Ker} T$.

3. Considere a seguinte matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
   (a) Calcule os valores próprios de A.
   (b) Determine os espaços próprios de A, indicando bases para eles.
   (c) Indique uma matriz S, invertível, tal que $S^{-1}AS$ seja diagonal.
   (d) Considere $\varphi \colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = X^T \left(A^T A\right) Y$ onde $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$. Diga, justificando, se φ é ou não um produto interno em $\mathbb{R}^4$.

4. Considere a figura geométrica de $\mathbb{R}^2$ de equação $f(x, y) = 0$, onde
$$f(x, y) = 3x^2 + 4xy - x + y.$$
   (a) Identifique a matriz simétrica $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e a matriz-linha $B \in M_{1\times 2}(\mathbb{R})$ tais que $f(x, y) = X^T AX + BX$, onde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.
   (b) Determine uma mudança ortogonal de coordenadas que diagonalize A. Escreva a equação $f(x, y) = 0$ nas novas variáveis x', y'.
   (c) Complete os quadrados em $f(x', y') = 0$ e identifique a figura geométrica em questão.

Resolução

1. Seja V um espaço de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ e F um subespaço de V. Considere o seguinte subconjunto de $V \times V$:
$$W = \{(v, w) \in V \times V \mid v - w \in F\}.$$

(a) Mostre que W é subespaço de $V \times V$.

Solução: O conjunto W contém o vector $(0, 0)$ já que $0 - 0 = 0 \in F$ (uma vez que F é subespaço). Conclui-se que $W \neq \emptyset$.

Que W é fechado para a adição: Sejam (v_1, v_2) e (w_1, w_2) dois vectores de $V \times V$ pertencentes a W, i.e., tais que $v_1 - v_2$ e $w_1 - w_2$ pertencem a F. Uma vez que F é subespaço de V e, como tal, é fechado para a adição, tem-se que $(v_1 - v_2) + (w_1 - w_2) \in F$. Usando as propriedades associativa e comutativa da adição obtemos $(v_1 - v_2) + (w_1 - w_2) = (v_1 + w_1) - (v_2 + w_2) \in F$, ou seja, $(v_1 + w_1, v_2 + w_2) \in W$. Conclui-se assim que W é fechado para a adição.

Que W é fechado para a multiplicação escalar: Seja $(v_1, v_2) \in W$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Em primeiro lugar, temos $\alpha(v_1, v_2) = (\alpha v_1, \alpha v_2)$. Este vector pertence a W se e só se $\alpha v_1 - \alpha v_2$ pertencer a F. Por um lado, usando a distributividade da multiplicação escalar, $\alpha v_1 - \alpha v_2 = \alpha(v_1 - v_2)$; por outro lado, como F é subespaço, e logo, fechado para a multiplicação escalar, da hipótese de que $v_1 - v_2 \in F$ deduz-se que $\alpha(v_1 - v_2) \in F$. Em suma, deduzimos que $\alpha(v_1, v_2) \in W$, para qualquer $(v_1, v_2) \in W$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Por outras palavras, W é fechado para a multiplicação escalar.

(b) Mostre que $\dim W = \dim V + \dim F$.

Solução: Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de V e $\{u_1, \ldots, u_k\}$ uma base de F. Consideremos os n vectores de $V \times V$ dados por $(e_1, e_1), \ldots, (e_n, e_n)$ e os k vectores de $V \times V$ dados por $(u_1, 0), \ldots, (u_k, 0)$. Em primeiro lugar, mostremos que estes $n + k$ vectores geram W. Temos

$$W = \{(v, w) \in V \times V \mid v - w \in F\} =$$
$$= \{(v, w) \in V \times V \mid \exists u \in F \text{ tal que } v - w = u\} =$$
$$= \{(v, w) \in V \times V \mid \exists u \in F \text{ tal que } v = u + w\} =$$
$$= \{(u + w, w) \in V \times V \mid u \in F \text{ e } w \in V\} = \{(u, 0) + (w, w) \in V \times V \mid u \in F \text{ e } w \in V\} =$$
$$= \{(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k, 0) + (\beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n, \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n) \in V \times V \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}\} =$$
$$= \mathscr{L}\{(u_1, 0) \ldots, (u_k, 0), (e_1, e_2), \ldots, (e_n, e_n)\}.$$

Finalmente, verifiquemos que estes $n + k$ vectores são linearmente independentes. Para tal, vamos empregrar o critério de independência linear. Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ e $\beta_1, \ldots, \beta_n$ escalares quaisquer. Suponhamos que
$$\alpha_1(u_1, 0) + \cdots \alpha_k(u_k, 0) + \beta_1(e_1, e_1) + \cdots \beta_n(e_n, e_n).$$

Então $(\sum_i^k \alpha_i u_i + \sum_j^n \beta_j e_j, \sum_j^n \beta_j e_j) = 0$, ou seja, $\sum_i^k \alpha_i u_i + \sum_j^n \beta_j e_j = 0$ e $\sum_j^n \beta_j e_j = 0$. Da independência linear dos vectores $e_1, \ldots, e_n$ e da segunda igualdade, deduz-se que $\beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$.

Desta forma, a primeira igualdade reduz-se a $\sum_i^k \alpha_i u_i = 0$. Usando agora a independência linear dos vectores $u_1, \ldots, u_k$ deduz-se que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. Em conclusão

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_1 = \cdots = \beta_n = 0,$$

i.e., cumpre-se o critério de independência linear. Assim, podemos afirmar que $(u_1, 0), \ldots, (u_k, 0)$, $(e_1, e_1), \ldots, (e_n, e_n)$ são linearmente independentes. Logo $\{(u_1, 0), \ldots, (u_k, 0), (e_1, e_1), \ldots, (e_n, e_n)\}$ é uma base de W, donde $\dim W = n + k = \dim V + \dim F$.

(c) Suponha que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$ e $F = \mathscr{L}\{(1,1,1)\}$. Calcule uma base de W e indique a dimensão deste subespaço.

Solução: Da forma como resolvemos a alínea anterior, não é necessário repetir os cálculos. O conjunto

$$\{((1,1,1),(0,0,0)),((1,0,0),(1,0,0)),((0,1,0),(0,1,0)),((0,0,1),(0,0,1))\}$$

é uma base de W e, consequentemente, $\dim W = 4$.

[Note que esta alínea se podia resolver independentemente da se ter resolvido a alínea anterior, para tal, bastava realizar os cálculos feitos naquela alínea substituindo V e F por valores concretos.]

2. Considere a transformação linear $T \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x + z, y - x, y + z)$.

(a) Calcule uma base de $\operatorname{Ker} T$.

Solução: Da definição do núcleo de uma transformação linear, temos:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} T &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x,y,z) = (0,0,0)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+z, y-x, y+z) = (0,0,0)\} = \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{\begin{array}{l} x+z = 0 \\ -x+y = 0 \\ y+z = 0 \end{array}\right.\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{\begin{array}{l} x+z = 0 \\ y+z = 0 \\ y+z = 0 \end{array}\right.\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{\begin{array}{l} x+z = 0 \\ y+z = 0 \end{array}\right.\right\} = \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z \text{ e } y = -z\} = \{(-z,-z,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathscr{L}\{(-1,-1,1)\}\end{aligned}$$

Logo $\{(-1,-1,1)\}$ é base de $\operatorname{Ker} T$.

(b) Diga, justificando, se T é ou não sobrejectiva.

Solução: Da fórmula $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T$ conclui-se que $\dim \operatorname{Im} T = 3 - 1 = 2$, uma vez que, da alínea anterior, resulta que $\dim \operatorname{Ker} T = 1$. Este cálculo permite concluir que $\operatorname{Im} T \neq \mathbb{R}^3$, caso contrário, $\dim \operatorname{Im} T = \dim \mathbb{R}^3 = 3$. E se $\operatorname{Im} T \neq \mathbb{R}^3$ então, pela definição, T não é sobrejectiva.

(c) Escreva a matriz que representa a transformação T relativamente à base do domínio $\{(1,1,1),(0,1,0),(1,0,-1)\}$ e à base do contradomínio $\{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$.

Solução: O cálculo da representação matricial de uma transformação linear relativamente a uma dada base do domínio e a uma dada base do contradomínio envolve repetir o seguinte processo para cada vector da base do domínio dada:

i. Calcular a imagem desse vector pela transformção.
ii. Calcular o vector-coluna de coordenadas dessa imagem na base do contradomínio.
iii. Escrever na ordem em que esse vector da base do domínio é dado, o vector-coluna obtido no passo anterior na matriz da representação matricial.

Desta forma, temos: $T(1,1,1) = (2,0,2)$, cujo vector-coluna de coordenadas na base do contradomínio indicada se obtém resolvendo o sistema que resulta de:

$$(2,0,2) = \alpha(0,0,1) + \beta(0,1,0) + \gamma(1,0,0).$$

Neste caso a solução é simplesmente: $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$. De seguida, temos $T(0,1,0) = (0,1,1)$, cujo vector-coluna de coordenadas na base do contradomínio indicada (que se obtém pelo processo já descrito) é $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$. Finalmente vem $T(1,0,-1) = (0,-1,-1)$, cujo vector-coluna de coordenadas na base do contradomínio indicada é $\left[\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$.

De acordo com este cálculo, deduzimos que a matriz pedida é: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) Determine um subespaço W de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = W \oplus \operatorname{Ker} T$.

Solução: Não existe uma única solução para este problema. No entanto, o ortogonal de $\operatorname{Ker} T$ é uma das soluções para este problema mais fáceis de calcular. Temos

$$\begin{aligned}
(\operatorname{Ker} T)^\perp &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (x,y,z), (-1,-1,1) \rangle \big\} = \\
&= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x - y + z = 0\big\} = \\
&= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y + z\big\} = \\
&= \big\{(-y+z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in \mathbb{R}\big\} = \\
&= \big\{y(-1,1,0) + z(1,0,1) \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in \mathbb{R}\big\} = \\
&= \mathscr{L}\left\{(-1,1,0), (1,0,1)\right\}.
\end{aligned}$$

E assim $W = (\operatorname{Ker} T)^\perp = \mathscr{L}\left\{(-1,1,0), (1,0,1)\right\}$.

Outra maneira de resolver este problema usa as técnicas estudadas para estender um conjunto linearmente independente de vectores a uma base. Em primeiro lugar, o conjunto $\mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{Ker} T$ é o conjunto de todos os vectores que não são múltiplos de $(-1,-1,1)$. [Note que este conjunto não é espaço vectorial!] Como o vector $(1,0,0)$ pertence a $\mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{Ker} T$, ele pode ser o novo elemento do conjunto candidato a base. Os vectores que não pertencem a

$$\operatorname{Ker} T \oplus \mathscr{L}\left\{(1,0,0)\right\} = \mathscr{L}\left\{(-1,-1,1), (1,0,0)\right\}$$

tem última coordenada simétrica da segunda. Assim, deduz-se que $(0,1,0)$ não pertence a esta soma directa e logo $(0,1,0)$ pode ser adicionado a $\{(-1,-1,1), (1,0,0)\}$ de modo a que o conjunto resultante seja formado por vectores linearmente independentes. Uma vez que $\mathbb{R}^3$ tem dimensão 3, esse conjunto, trata-se igualmente de uma base de $\mathbb{R}^3$. Desta forma temos:

$$\mathbb{R}^3 = \mathscr{L}\left\{(-1,-1,1), (1,0,0), (0,1,0)\right\} = \mathscr{L}\left\{(-1,-1,1)\right\} \oplus \mathscr{L}\left\{(1,0,0), (0,1,0)\right\}$$

(onde a soma directa é consequência da independência linear dos vectores da base). Conclui-se que $\mathscr{L}\left\{(1,0,0), (0,1,0)\right\}$ é outra solução para o problema.

3. Considere a seguinte matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule os valores próprios de A.

Solução: Os valores próprios de uma matriz A calculam-se achando os zeros do polinómio $\det(A-\lambda I)$. Neste caso,

$$\det(A-\lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2-\lambda & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda)((2-\lambda)(-\lambda)-3) = (1-\lambda)(-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+1).$$

Os valores próprios de A são 1, -1, 0 e 3.

(b) Determine os espaços próprios de A, indicando bases para eles.

Solução: Se λ for um valor próprio de A, o espaço próprio associado a λ, denotado $E(\lambda)$, determina-se calculando $N(A-\lambda I)$. Neste caso,

$$E(1) = N \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

O espaço-nulo de uma matriz é o conjunto-solução do sistema homogéneo a ela associado. Vamos reduzir aquela matriz. Temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5/2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1/4 & -19/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} E(1) &= \left\{ [x\ y\ z\ w]^T \mid -\tfrac{1}{4}z - \tfrac{19}{4}w = 0,\ 2y+z+3w=0 \text{ e } 2x-y=0 \right\} = \\ &= \left\{ [x\ y\ z\ w]^T \mid z=-19w,\ 2y=16w \text{ e } 2x=y \right\} = \\ &= \left\{ [x\ y\ z\ w]^T \mid z=-19w,\ y=8w \text{ e } x=4w \right\} = \\ &= \left\{ [4w\ 8w\ \ -19w\ w]^T \mid w \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \mathscr{L}\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -19 \\ 1 \end{bmatrix}. \right\} \end{aligned}$$

Os restantes espaços próprios calculam-se analogamente. Temos:

$$E(-1) = \mathscr{L}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \quad E(0) = \mathscr{L}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \quad E(3) = \mathscr{L}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

De facto, com a excepção do primeiro espaço calculado, os espaços próprios calculam-se facilmente por inspecção da matriz $A-\lambda I$. Na situação presente, em que há 4 valores próprios distintos e a matriz é 4×4, sabemos que cada espaço próprio tem dimensão 1 (justifique!) e, como tal, para achar uma base basta determinar um vector não nulo em $N(A-\lambda I)$, o que quer dizer, se o leitor preferir, determinar uma solução não nula do sistema homogéneo associado a $A-\lambda I$. Esta é também uma das situações em que, baseando-nos apenas no resultado do cálculo dos valores próprios, é possível afirmar que A é diagonalizável. (Nunca é demais alertar para o erro comum que é dizer que esta é a *única* situação em que uma matriz é diagonalizável!) Mantendo esta justificação teórica em pano de fundo, vejamos, por exemplo, como se faz "de cabeça" o cálculo de $E(-1)$. Estou à procura de um vector-coluna, digamos $[\star\ \star\ \star\ \star]^T$, não nulo, que é solução do sistema homogéneo associado a

$\left[\begin{smallmatrix} 2&0&0&0\\ 2&1&0&0\\ 2&1&3&3\\ 3&1&1&1 \end{smallmatrix}\right]$. Por outras palavras, estou à procura de $[\star\ \star\ \star\ \star]$ que satisfaça às quatro equações. (Cada uma correspondendo a uma linha da matriz do sistema — é um facto desconcertante, que uma vez assimilada a técnica de resolução de sistemas lineares usando a redução da matriz do sistema, o aluno seja incapaz de interpretar uma linha da matriz como uma equação linear!) Uma forma de satisfazer a primeira equação é fazendo $[0 \star \star \star]$. Desta feita, uma forma de satisfazer a segunda equação é fazendo $[0\ 0\ \star \star]$. Devo agora tentar satisfazer a terceira equação. Basta concretizar as derradeiras $\star$'s com quaisquer valores que sejam soluções. Por exemplo $[0\ 0\ -1\ 1]$. Porque é que isto também é solução para a quarta equação? Bom, de facto verifica-se que assim é. Por outro lado se o princípio desde cálculo mental foi facilitado pelo facto da matriz ser triangular (naquelas duas primeiras linhas) tal também implica que as três primeiras linhas são linearmente independentes, ou seja, correspondem a equações lineares que impõem, genuinamente, 3 condições (lineares) no espaço das variáveis; contudo, como temos por certo que aquela matriz tem característica ≤ 3 (porquê?), a quarta linha terá de ser combinação linear das três primeiras, o que em termos de equações lineares significa "nenhuma condição adicional no espaço das variáveis," i.e., qualquer solução das três primeiras equações será-o também da quarta.

(c) Indique uma matriz S, invertível, tal que $S^{-1}AS$ seja diagonal.

Solução: Basta agrupar os elementos das bases dos espaços próprios nas colunas de uma matriz:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -3 & 0 \\ -19 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) Considere $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = X^T \left(A^T A\right) Y$ onde $X = \left[\begin{smallmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{smallmatrix}\right]$ e $Y = \left[\begin{smallmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4 \end{smallmatrix}\right]$. Diga, justificando, se φ é ou não um produto interno em $\mathbb{R}^4$.

Solução: Designemos (x_1, x_2, x_3, x_4) por $\mathbf{x}$ e (y_1, y_2, y_3, y_4) por $\mathbf{y}$. Temos

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X^T(A^T A)Y \stackrel{\dagger}{=} \left(X^T A^T A Y\right)^T = Y^T(A^T A)X = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x}),$$

onde em (†) se usa o facto que qualquer matriz 1×1 é igual à sua transposta. Conclui-se que se verifica o primeiro axioma de produto interno. Analogamente, mantendo uma convenção semelhante para a notação, temos:

$$\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y}) == (X + Z)^T(A^T A)Y = X^T(A^T A)Y + Z^T(A^T A)Y = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{z}, \mathbf{y})$$

e também,

$$\varphi(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\alpha X)^T(A^T A)Y = \alpha X^T(A^T A)Y = \alpha\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Contudo o quarto e último axioma não se verifica. Uma das obstruções está no facto que A tem $N(A) \neq \{0\}$. Ou seja, existe $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ não nulo tal que $AX = 0$. Resulta pois que

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = X^T(A^T A)X = X^T A^T (AX) = X^T A^T 0 = 0,$$

o que contradiz o quarto axioma de produto interno.

4. Considere a figura geométrica de $\mathbb{R}^2$ de equação $f(x,y)=0$, onde

$$f(x,y) = 3x^2 + 4xy - x + y.$$

(a) Identifique a matriz simétrica $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e a matriz-linha $B \in M_{1\times 2}(\mathbb{R})$ tais que $f(x,y) = X^T AX + BX$, onde $X = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$.

Solução: $A = \left[\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ e $B = \left[\begin{smallmatrix} -1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$.

(b) Determine uma mudança ortogonal de coordenadas que diagonalize A. Escreva a equação $f(x,y)=0$ nas novas variáveis x', y'.

Solução: Neste caso, uma vez que A é 2×2, apenas há-que determinar as bases dos espaços próprios de A e normalizar os vectores encontrados. Em primeiro lugar, calculam-se os valores próprios de A:

$$\det(A - \lambda I) = \det \left[\begin{smallmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{smallmatrix}\right] = (3-\lambda)(-\lambda) - 4 = \lambda^4 - 3\lambda - 4 = (\lambda+1)(\lambda-4).$$

Conclui-se assim que os valores próprios são -1 e 4. De seguida, calculam-se os espaços próprios associados a cada um destes valores próprios. Temos

$$E(-1) = N\left[\begin{smallmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right] = \mathscr{L}\left\{\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right]\right\} \quad \text{e} \quad E(4) = N\left[\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{smallmatrix}\right] = \mathscr{L}\left\{\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]\right\}.$$

Aqui, voltamos a fazer o cálculo mental dos espaços próprios, tendo em mente a justificação teórica explicada no problema 3b). Finalmente normalizamos cada um dos vectores calculados. Uma vez que ambos têm norma $\sqrt{5}$, trata-se de multiplicar ambos os vectores por $\sqrt{5}/5$. A matriz da mudança ortogonal de coordenadas é dada por: $Q = \left[\begin{smallmatrix} \sqrt{5}/5 & 2\sqrt{5}/5 \\ -2\sqrt{5}/5 & \sqrt{5}/5 \end{smallmatrix}\right]$. Escrevamos agora a equação $f(x,y)=0$ nas novas variáveis. Fazendo $X' = \left[\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right]$, temos:

$$\begin{aligned} X^T AX + BX &= (QX')^T A(QX') + B(QX') = X'^T\left(Q^T AQ\right)X' + (BQ)\,X' = \\ &= -(x')^2 + 4(y')^2 - 3\tfrac{\sqrt{5}}{5}x' - \tfrac{\sqrt{5}}{5}y'. \end{aligned}$$

(c) Complete os quadrados em $f(x',y')=0$ e identifique a figura geométrica em questão.

Solução: Temos:

$$\begin{aligned} f(x',y') &= -(x')^2 + 4(y')^2 - 3\tfrac{\sqrt{5}}{5}x' - \tfrac{\sqrt{5}}{5}y' = \\ &= -\left[(x')^2 + 3\tfrac{\sqrt{5}}{5}x'\right] + 4\left[(y')^2 - \tfrac{\sqrt{5}}{20}y'\right] = \\ &= -\left[(x')^2 + 2\cdot 3\tfrac{\sqrt{5}}{10}x' + \tfrac{9\cdot 5}{100} - \tfrac{9\cdot 5}{100}\right] + 4\left[(y')^2 - 2\cdot\tfrac{\sqrt{5}}{40}y' + \tfrac{5}{40^2} - \tfrac{5}{40^2}\right] = \\ &= -\left[x' + 3\tfrac{\sqrt{5}}{10}\right]^2 + \tfrac{9\cdot 5}{100} + 4\left[y' - \tfrac{\sqrt{5}}{40}\right]^2 - 4\cdot\tfrac{5}{40^2} = \\ &= -\left[x' + 3\tfrac{\sqrt{5}}{10}\right]^2 + 4\left[y' - \tfrac{\sqrt{5}}{40}\right]^2 + \tfrac{7}{16}. \end{aligned}$$

Conclui-se que a figura geométrica em questão é uma hipérbole.

$\boxed{\text{FIM}}$