Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica II

(Licenciatura em Matemática)

1ª Frequência, 10/11/2004

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Sejam V e W espaços vectoriais sobre o mesmo corpo e seja $T\colon V \longrightarrow W$ uma transformação linear. Mostre que se T for injectiva então T transforma conjuntos de vectores linearmente independentes de V em conjuntos de vectores linearmente independentes de W.

2. Seja V um espaço vectorial de dimensão finita e $S\colon V \longrightarrow V$ uma transformação linear. Prove que:
   (i) Se S for injectiva então é sobrejectiva.
   (ii) Se S for sobrejectiva então é injectiva.

3. Seja $W = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) = \mathrm{Im}(z_3)\}$. Mostre que W não é subespaço do espaço complexo $\mathbb{C}^3$.

4. Seja $B \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_7)$. Considere o seguinte subconjunto do espaço vectorial $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_7)$: $W = \{X \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_7) \mid XB = 0_{2\times 2}\}$.
   (a) Mostre que W é subespaço de $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_7)$.
   (b) Suponha que $B = \left[\begin{smallmatrix} \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{3} & \overline{4} \end{smallmatrix}\right]$. Calcule a dimensão de W.

5. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação definida por $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3)$.
   (a) Mostre que T é linear.
   (b) Mostre que T é sobrejectiva.
   (c) Calcule a dimensão do núcleo de T.

Resolução:

1. Sejam V e W espaços vectoriais sobre o mesmo corpo e seja $T\colon V \longrightarrow W$ uma transformação linear. Mostre que se T for injectiva então T transforma conjuntos de vectores linearmente independentes de V em conjuntos de vectores linearmente independentes de W.

   Solução: Seja $\{v_1, \ldots, v_k\}$ um conjunto de vectores de V linearmente independentes. Usemos o critério de independência linear para mostrar que o conjunto $\{T(v_1), \ldots, T(v_k)\}$ é formado por vectores linearmente independentes. Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ escalares tais que

   $$\alpha_1 T(v_1) + \cdots \alpha_k T(v_k) = 0_W.$$

   Pela linearidade de T conclui-se que $T(\alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_k v_k) = 0_W$, ou seja, que o vector $\alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_k v_k$ pertence ao núcleo de T. Uma vez que T é injectiva e que então (é mesmo uma condição equivalente) o seu núcleo se reduz a $\{0_V\}$, conclui-se que $\alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_k v_k = 0_V$. Por hipótese, $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é um conjunto de vectores de V linearmente independentes logo pelo critério de independência linear (aplicado a este conjunto) conclui-se que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. $\square$

2. Seja V um espaço vectorial de dimensão finita e $S\colon V \longrightarrow V$ uma transformação linear. Prove que:

   (i) Se S for injectiva então é sobrejectiva.
   Solução: Se T injectiva transforma conjuntos de vectores linearmente independentes de V em conjuntos de vectores linearmente independentes. Seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Pelo que acabámos de referir, $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ é também um conjunto de vectores linearmente independentes. Uma vez que o número de elementos deste conjunto é igual à dimensão de V deduz-se que $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ é uma base de V; em particular T transforma um conjunto de geradores de V num conjunto de geradores de V, ou seja, T é uma transformação linear sobrejectiva.

   (ii) Se S for sobrejectiva então é injectiva.
   Solução: Tal como na alínea anterior, consideremos uma base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V. Uma vez que T é sobrejectiva, o conjunto $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ gera V. Como V tem dimensão igual ao número de elementos do conjunto anterior, conclui-se que $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ é uma base de V. Em particular trata-se de um conjunto de vectores linearmente independente. A conclusão tira-se das seguintes equivalências.

   $$\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\} \text{ lin. dep. } \iff$$
   $$\iff \exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} \text{ tal que } \alpha_1 T(v_1) + \cdots \alpha_n T(v_n) = 0_V \iff$$
   $$\iff \exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} \text{ tal que } T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = 0_V \iff$$
   $$\iff \operatorname{Ker} T \neq \{0_V\} \iff T \text{ não é injectiva}$$

   Nota: Se V é um espaço de dimensão infinita, nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira em geral. Consideremos o espaço $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ das funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$. Seja $T\colon \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ a transformação (verifique que é linear) definida por

   $$\begin{pmatrix} f\colon & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & n \mapsto f(n) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} T(f)\colon & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & n \mapsto f(n+1) \end{pmatrix}$$

   é sobrejectiva (verifique) mas não é injectiva. De facto se $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ são duas funções, $T(f) = T(g)$ se e só se f e g coincidem em $\{n \geq 1\} \subset \mathbb{N}$; a imagem do zero não tem de coincidir. Já a transformação que envia $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ na função $T(f)$ tal que $T(f)(0) = 0$ e $T(f)(n) = f(n-1)$ é injectiva e não é sobrejectiva.

3. Seja $W = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) = \mathrm{Im}(z_3)\}$. Mostre que W não é subespaço do espaço complexo $\mathbb{C}^3$.

Solução: Neste caso falha o axioma do fecho da multiplicação por um escalar. Consideremos o vector $(1,1,1+i)$. Temos $\mathrm{Re}(1) = \mathrm{Im}(1+i) = 1$ e logo $(1,1,i) \in W$. No entanto $i(1,1,1+i) = (i,i,-1+i) \notin W$ já que $\mathrm{Re}(i) = 0$ mas $\mathrm{Im}(-1+i) \neq 0$.

4. Seja $B \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_7)$. Considere o seguinte subconjunto do espaço vectorial $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_7)$: $W = \{X \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_7) \mid XB = 0_{2\times 2}\}$.

(a) Mostre que W é subespaço de $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_7)$.

Solução: W é não vazio uma vez que $0_{2\times 2}B = 0_{2\times 2}$ e logo $0_{2\times 2} \in W$. Mostremos que W é fechado para a adição. Sejam X_1 e X_2 dois elementos de W. Isto é, duas matrizes tais que $X_1B = X_2B = 0_{2\times 2}$. Temos $(X_1+X_2)B = X_1B + X_2B = 0_{2\times 2} + 0_{2\times 2} = 0_{2\times 2}$. Deste modo, $X_1 + X_2 \in W$. Mostremos que W é fechado para a multiplicação por um escalar. Seja $X \in W$ e $\alpha \in \mathbb{Z}_7$. Temos $(\alpha X)B = \alpha(XB) = \alpha 0_{2\times 2} = 0_{2\times 2}$; logo $\alpha X \in W$. Assim conclui-se que W é subespaço de $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_7)$.

(b) Suponha que $B = \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{3} & \overline{4} \end{bmatrix}$. Calcule a dimensão de W.

Solução: A matriz B é invertível. Para ver que assim é, basta calcular o seu determinante: $\det(B) = \overline{1}\cdot\overline{4} - \overline{3}\cdot\overline{2} = \overline{4} - \overline{6} = \overline{4} + \overline{1} = \overline{5} \neq \overline{0}$. Desta forma

$$XB = 0_{2\times 2} \iff (XB)B^{-1} = 0_{2\times 2}B^{-1} = 0_{2\times 2} \iff X = 0_{2\times 2}.$$

Logo $W = \{0_{2\times 2}\}$; donde $\dim W = 0$.

5. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação definida por $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3)$.

(a) Mostre que T é linear.

Solução: Sejam (x_1,x_2,x_3) e (y_1,y_2,y_3) vectores de $\mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos

$$\begin{aligned}
&T((x_1,x_2,x_3) + (y_1,y_2,y_3)) = \\
&= T(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) = \\
&= (x_1+y_1-(x_2+y_2), x_2+y_2-(x_3+y_3)) = \\
&= (x_1-x_2+y_1-y_2, x_2-x_3+y_2-y_3) = \\
&= (x_1-x_2, x_2-x_3) + (y_1-y_2, y_2-y_3) = \\
&= T(x_1,x_2,x_3) + T(y_1.y_2,y_3).
\end{aligned}$$

Temos também

$$\begin{aligned}
&T(\alpha(x_1,x_2,x_3)) = \\
&= T(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) = \\
&= (\alpha x_1 - \alpha x_2, \alpha x_2 - \alpha x_3) = \\
&= \alpha(x_1-x_2, x_2-x_3) = \\
&= \alpha T(x_1,x_2,x_3).
\end{aligned}$$

Mostrámos que T é uma transformação linear.

Nota: Não faz parte dos axiomas que definem uma transformação linear que $T(0,0,0) = (0,0)$. Esta é uma consequência da linearidade e como tal não é necessário verificar. Esta propriedade é frequentemente usada como (primeiro) teste para verificar que certa transformação não é linear. Mais precisamente uma transformação que viole esta condição não é linear.

(b) Mostre que T é sobrejectiva.

Solução: Basta verificar que todos os vectores de $\mathbb{R}^2$ são imagem de algum vector de $\mathbb{R}^3$ pela transformação T. Há várias maneiras de fazer isto uma vez que (como veremos adiante) T não é injectiva. Seja $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ um vector arbitrário. Então o vector $(a,0,-b)$ tem imagem o vector (a,b) como se verifica facilmente: $T(a,0,-b) = (a-0, 0-(-b)) = (a,b)$.

(c) Calcule a dimensão do núcleo de T.

Solução: Pela alínea anterior, T é sobrejectiva e logo $\dim \operatorname{Im} T = \dim \mathbb{R}^2 = 2$. Aplicando a fórmula

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T;$$

deduz-se que $\dim \operatorname{Ker} T = 1$.

Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica II

(Licenciatura em Matemática)

2ª Frequência, 15/12/2004

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Considere uma matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e α um número real. Mostre que se na matriz $A - \alpha I$ existe uma linha que é combinação linear das restantes então α é valor próprio de A

2. Considere a matriz $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Por inspecção das matrizes $A - 2I_4$ e $A + 2I_4$ e sem calcular determinantes, mostre que 2 e -2 são valores próprios de A.

   (b) Sabendo que 2 e -2 são valores próprios de A, calcule os restantes valores próprios desta matriz.

   (c) Sabendo que existe pelo menos mais um valor próprio de A diferente de 2 e -2 e sem calcular os espaços próprios de A, mostre que

   $$2 \leq \dim E(2) + \dim E(-2) \leq 3$$

   onde $E(2)$ e $E(-2)$ designam os espaços próprios de A associados a 2 e a -2.

3. Seja A uma matriz simétrica real. Prove que:

   (a) Todos os valores próprios de A são reais.

   (b) Vectores próprios de A associados a valores próprios distintos são ortogonais.

4. Considere a seguinte equação quadrática em $\mathbb{R}^2$:

   $$f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + x + y + 1 = 0.$$

   (a) Indique matrizes $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ simétrica e $B \in M_{1\times 2}(\mathbb{R})$, tais que

   $$f(x,y) = X^T AX + BX + 1,$$

   onde $X = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$.

   (b) Complete os quadrados de forma a obter $f(x,y)$ na forma reduzida e identifique a figura geométrica dada pela equação $f(x,y) = 0$.

5. Seja V um espaço com produto interno. Usando apenas as definições, mostre que se $v_1, \ldots, v_k \in V \setminus \{0\}$ são vectores dois a dois ortogonais então $v_1, \ldots, v_k$ são linearmente independentes.

Resolução:

1. Considere uma matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e α um número real. Mostre que se na matriz $A - \alpha I$ existe uma linha que é combinação linear das restantes então α é valor próprio de A

   Solução: Se a matriz $A - \alpha I$ tem uma linha que é combinação linear das restantes então a dimensão do espaço linha desta matriz é estritamente menor que n. Por outras palavras $A - \alpha I$ é uma matriz singular e como tal tem determinante nulo. Por lado sabemos do texto teórico que α é um valor próprio se e só se $\det(A - \alpha I) = 0$.

2. Considere a matriz $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Por inspecção das matrizes $A - 2I_4$ e $A + 2I_4$ e sem calcular determinantes, mostre que 2 e -2 são valores próprios de A.

   Solução: A matriz $A - 2I_4$ é a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

   cuja primeira linha é simétrica da segunda. Desta forma, de acordo com o que demonstrámos no Problema 1, conclui-se que 2 é valor próprio de A. Analogamente, uma vez que

$$A + 2I_4 = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

   e que esta matriz tem a terceira linha simétrica da quarta linha, conclui-se que -2 é valor próprio de A.

   (b) Sabendo que 2 e -2 são valores próprios de A, calcule os restantes valores próprios desta matriz.

   Solução: Calculemos o polinómio característico de A:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -3 \\ 0 & -3 & 1-\lambda \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -3 \\ 0 & -3 & 1-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^2(3-\lambda)^2 - 9(3-\lambda)^2 - (1-\lambda)^2 + 9 = \left((3-\lambda)^2 - 1\right)\left((1-\lambda)^2 - 9\right) =$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda - 4)(\lambda + 2)(\lambda - 4).$$

   Desta forma os valores próprios da matriz A são -2, 2 e 4 com multiplicidade 2. Nota: Uma alternativa ao cálculo do determinante usa o resultado que uma matriz diagonal por blocos tem determinante igual ao produto dos determinantes dos seus blocos.

(c) Sabendo que existe pelo menos mais um valor próprio de A diferente de 2 e -2 e sem calcular os espaços próprios de A, mostre que

$$2 \leq \dim E(2) + \dim E(-2) \leq 3$$

onde $E(2)$ e $E(-2)$ designam os espaços próprios de A associados a 2 e a -2.

Solução: Se α é um valor próprio então $\dim E(\alpha) \geq 1$. Desta forma $\dim E(2) + \dim E(-2) \geq 2$. Por outro lado, do texto teórico, sabemos que a soma das dimensões de todos os espaços próprios duma matriz $n \times n$ não excede n. Logo, sendo β um valor próprio distinto de 2 e -2, temos

$$\dim E(2) + \dim E(-2) + \dim E(\beta) \leq 4 \Longleftrightarrow \dim E(2) + \dim E(-2) \leq 4 - \dim E(\beta) \leq 3.$$

3. Seja A uma matriz simétrica real. Prove que:

(a) Todos os valores próprios de A são reais.
Solução: [Consultar texto teórico.]

(b) Vectores próprios de A associados a valores próprios distintos são ortogonais.
Solução: [Consultar texto teórico.]

4. Considere a seguinte equação quadrática em $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + x + y + 1 = 0.$$

(a) Indique matrizes $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ <u>simétrica</u> e $B \in M_{1\times 2}(\mathbb{R})$, tais que

$$f(x,y) = X^T AX + BX + 1,$$

onde $X = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$.
Solução: $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ e $B = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$. <u>Nota</u>: Neste caso, a matriz A é diagonal, logo não é necessário determinar uma mudança de coordenadas que a diagonalize.

(b) Complete os quadrados de forma a obter $f(x,y)$ na forma reduzida e identifique a figura geométrica dada pela equação $f(x,y) = 0$.
Solução: Temos:

$$2x^2 + 3y^2 + x + y + 1 = 0 \Longleftrightarrow 2(x^2 + \tfrac{1}{2}x) + 3(y^2 + \tfrac{1}{3}y) + 1 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 2(x^2 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{16}) + 3(y^2 + \tfrac{1}{3}y + \tfrac{1}{36} - \tfrac{1}{36}) + 1 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 2(x + \tfrac{1}{4})^2 + 3(y + \tfrac{1}{6})^2 + 1 - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{12} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 2(x + \tfrac{1}{4})^2 + 3(y + \tfrac{1}{6})^2 = -\tfrac{19}{24}$$

Concluimos que o conjunto solução de $f(x,y) = 0$ é o vazio.

5. Seja V um espaço com produto interno. Usando apenas as definições, mostre que se $v_1, \ldots, v_k \in V \setminus \{0\}$ são vectores dois a dois ortogonais então $v_1, \ldots, v_k$ são linearmente independentes.

Solução: Vamos supor que V é espaço real. No caso dum espaço complexo a demonstração segue *mutatis mutandis.* Sejam $v_1, \ldots, v_k \in V \setminus \{0\}$ vectores dois a dois ortogonais. Tal significa apenas que $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$, onde δ_{ij} (o delta de Kronecker) é 0 se $i \neq j$ e 1 se $i = j$. Por definição $v_1, \ldots, v_k$ são linearmente independentes se não forem linerarmente dependentes, i.e. se nunhum vector desta lista é combinação linear dos restantes. Suponhamos, com vista a um absurdo, que existem números reais $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_k$ tais que

$$v_i = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \alpha_k v_k.$$

Então, usando a linearidade do produto interno na primeira variável, temos:

$$\begin{gathered}\langle v_i, v_i \rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \alpha_k v_k, v_i \rangle = \\ = \alpha_1 \langle v_1, v_i \rangle + \cdots + \alpha_{i-1} \langle v_{i-1}, v_i \rangle + \alpha_{i+1} \langle v_{i+1}, v_i \rangle + \cdots + \alpha_k \langle v_k, v_i \rangle = \\ = \alpha_1 \delta_{1i} + \cdots + \alpha_{i-1} \delta_{i-1,i} + \alpha_{i+1} \delta_{i+1,i} + \cdots + \alpha_k \delta_{ki} = 0.\end{gathered}$$

Ou seja, chega-se a uma contradição, uma vez que para um produto interno, $v_i \neq 0 \Longrightarrow \langle v_i, v_i \rangle > 0$.

$\boxed{\text{FIM}}$