Álgebra Linear e Geometria Analítica II

Prova Suplementar, 25/02/2005

1. Sejam F e G dois subespaços de dimensão finita de um espaço vectorial V. Prove que se tem

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

2. Seja F o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^2$:

$$F = \{(x_1, x_2) : x_2 = -3x_1\}.$$

   (a) Identificando $\mathbb{R}^2$ com um plano da forma habitual, represente F geometricamente.

   (b) Continuando a pensar geometricamente, designemos por $\mathcal{E}$ o conjunto de todas as rectas no plano paralelas a F. O objectivo desta alínea e da seguinte é mostrar que, para operações convenientemente definidas, $\mathcal{E}$ é um espaço vectorial real.

   Sendo $G, H \in \mathcal{E}$, definimos $G + H$ da seguinte forma: escolhemos $x \in G$ e $y \in H$ e designamos por $G+H$ a recta paralela a F que passa por $x+y$. (Faça uma figura que ilustre esta definição.)

   Sendo $G \in \mathcal{E}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos αG da seguinte forma: escolhemos $x \in G$ e designamos por αG a recta paralela a F que passa por αx. (Faça uma figura que ilustre esta definição.)

   Que lhe parecem estas definições?

   (c) Mostre que $\mathcal{E}$, com as operações definidas na alínea anterior, é um espaço vectorial real.

   (d) Mostre que $\mathcal{E}$ tem dimensão 1.

   (e) Indique uma transformação linear sobrejectiva de $\mathbb{R}^2$ para $\mathcal{E}$ e determine o núcleo dessa transformação linear.

3. Neste exercício pretende-se mostrar que qualquer matriz real $n \times n$ com n valores próprios reais é "triangularizável" por uma matriz ortogonal. Mais concretamente, pretende-se que demonstre que, dada uma qualquer matriz quadrada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ que tenha n valores próprios reais (não necessariamente todos distintos), existem uma matriz ortogonal $S \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e uma matriz $T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ triangular superior tais que $S^T A S = T$.

   (a) Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz qualquer com n valores próprios reais (não necessariamente todos distintos). Mostre que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ e um vector coluna v_1 com $\|v_1\| = 1$ tal que $Av_1 = \lambda v_1$.

   (b) Mostre que existem $v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ tais que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^n$.

   (c) Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n$ os vectores referidos na alínea anterior. Seja H a matriz que tem na primeira coluna o vector v_1, na segunda o vector v_2, etc. Mostre que $H^{-1} = H^T$.

   (d) Use as alíneas anteriores num argumento de indução para demonstrar a afirmação feita no início deste exercício.

4. Identifique a superfície no espaço definida pela equação $x^2 + y + z = 0$.