DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
Frequência de **Álgebra** Linear e Geometria Analítica **II**
Licenciatura em Matemática

14 de Outubro de 2005 Duração: 1h

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Considere o seguinte subconjunto de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a+b+d=0 \right\}.$$

   (a) Mostre que W é subespaço de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
   (b) Determine uma base e indique a dimensão de W.
   (c) Construa uma base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que contenha a base construída na alínea anterior.

2. Para cada uma das seguintes afirmações diga, justificando de forma breve, se é verdadeira ou falsa.

   (a) Seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ um conjunto linearmente independente de vectores de um espaço vectorial real. Então o conjunto $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1\}$ é linearmente independente.
   (b) Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente em V e dim V $= n$, então $\{v_1, \ldots, v_n\}$ E uma base de V.
   (c) Seja V um espaço vectorial de dimensão **3** e u, v, w vectores de V. Se dim $\mathscr{L}(u, v) =$ dim $\mathscr{L}(v, w) = 2$, então $\mathscr{L}(u, v, w) = V$.
   (d) Sejam S e T subespaços do espaço vectorial V. Se dim $S = 7$ e dim $T = 8$, então a menor dimensão possível para o subespaço $S + T$ é 8.

3. Sejam $v_1, \ldots, v_q$ vectores linearmente independentes de um espaço vectorial. Prove que, se um vector w não pertencer a $\mathscr{L}(v_1, \ldots, v_q)$, então os vectores $v_1, \ldots, v_q, w$ são também linearmente independentes.