DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Frequência de Álgebra Linear e Geometria Analítica II

Licenciatura em Matemática

18 de Novembro de 2005 — Duração: 1h

Importante: Responda apenas ao que se pede. **Justifique** as suas respostas. Seja conciso.

1. Sejam V um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{R}$ e $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de V. Seja $T : V \longrightarrow V$ a transformação linear tal que

$$T(v_1) = v_1 + v_2 + v_3, \quad T(v_2) = v_2, \quad T(v_3) = -v_2.$$

   (a) Escreva a matriz A que representa T na base B. Utilize essa matriz para calcular $T(2v_1 + 5v_2 - v_3)$.

   (b) T será injectiva? E sobrejectiva?

   (c) Calcule os valores próprios de A. A matriz A é diagonalizável? No caso afirmativo, indique uma matriz diagonalizante.

2. Para cada uma das seguintes afirmações diga, justificando de forma breve, se é verdadeira ou falsa.

   (a) Não existe nenhuma transformação linear sobrejectiva de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$.

   (b) Sejam V e W espaços vectoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Seja $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear não nula. Se $\dim V = \dim W = n$, então T é um isomorfismo.

   (c) Existe apenas uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(1, 0) = 1$.

   (d) Se A for uma matriz invertível e λ um valor próprio de A, então λ^{-1} é valor próprio de A^{-1}

3. Sejam V e W espaços vectoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. Seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Mostre que, se os vectores $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$ forem linearmente independentes, então T é injectiva.