DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Frequência de Álgebra Linear e Geometria Analítica II

Licenciatura em Matemática

21 de Dezembro de 2005 Duração: 1h

Importante: Responda **apenas** ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Identifique a figura geométrica do plano real $\mathbb{R}^2$ dada pela seguinte equação quadrática

$$x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y = 0.$$

2. Para cada uma das seguintes afirmações diga, justificando de forma breve, se é verdadeira ou falsa.

   (a) Se x e y forem vectores próprios de uma matriz simétrica real A associados a um valor próprio a, então (x, y) também é um vector próprio de A associado a a.

   (b) Seja A uma matriz simétrica real. Sejam λ_1 e λ_2 valores próprios de A distintos e v_1, v_2 vectores próprios associados a λ_1 e λ_2, respectivamente. Então v_1 e v_2 são ortogonais.

   (c) Sejam u e v vectores de um espaço vectorial real com produto interno, com $u \neq 0$. Se w for a projecção ortogonal de v sobre u, então $\|w\| \leq \|v\|$.

   (d) Sejam f, g e h funções em $C[-1,1]$ dadas por $f(t) = 1$, $g(t) = t$ e $h(t) = 1 + t^2$, $\forall t \in [-1,1]$. Então a projecção ortogonal de h no subespaço gerado por f e g é a função $\frac{4}{3}f$.

3. Sejam V um espaço vectorial real de dimensão finita com produto interno e W um subespaço de V com $\dim W = r$. Prove que:

   (a) Se u for um vector não nulo de V pertencente a $W^\perp$, então $\dim \mathscr{L}(W \cup \{u\}) = r + 1$.

   (b) $W \cap W^\perp = \{0\}$.