Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Álgebra Linear e Geometria Analítica II

Licenciatura em Matemática

19 de Janeiro de 2007 Duração: 2h30

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Considere o seguinte subconjunto de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) | \, a = -c \right\}.$$

   (a) Prove que S é um subespaço vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
   (b) Determine uma base e a dimensão de S.
   (c) Determine uma base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que contenha a base encontrada na alínea anterior.

2. Para cada uma das seguintes afirmações diga, justificando de forma breve, se é verdadeira ou falsa.

   (a) Seja v um vector arbitrário de um espaço vectorial V sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Então $(\alpha - \beta)v = \alpha v - \beta v$.
   (b) Sejam v_1, v_2, v_3 e v_4 vectores de um espaço vectorial. Se v_1, v_2 forem linearmente independentes e v_3, v_4 também forem linearmente independentes, então $\dim \mathcal{L}\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = 4$.
   (c) Seja $r > 1$ um inteiro positivo qualquer e A uma matriz real quadrada. Se A for diagonalizável, então A^r também é diagonalizável.

3. Sejam V e W espaços vectoriais reais com bases $\{v_1, v_2, v_3\}$ e $\{w_1, w_2\}$, respectivamente. Seja $T : V \longrightarrow W$ a transformação linear representada, relativamente às bases indicadas, pela matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Calcule $T(5v_1 - v_3)$.
   (b) T será injectiva? E sobrejectiva?
   (c) Considere a matriz invertível $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Construa uma base B de V de tal modo que AP seja a matriz de T relativamente às bases B e $\{w_1, w_2\}$.

4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine os valores próprios de A.
   (b) Sem efectuar cálculos, poderá afirmar se A é ou não diagonalizável?
   (c) Determine o subespaço próprio de A associado a um dos seus valores próprios e calcule uma base desse subespaço.
   (d) Identifique a quádrica dada pela equação $4x^2 + 2xy + 4y^2 + z^2 = 1$.

5. Seja V um espaço vectorial real de dimensão finita com produto interno. Dado um subespaço H de V, designe-se por $H^\perp$ o complemento ortogonal de H.

   (a) Sabendo que $V = H \oplus H^\perp$, mostre que $(H^\perp)^\perp = H$.
   (b) Dados F e G subespaços de V, prove que
      i. $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$;
      ii. $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.