Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Álgebra Linear e Geometria Analítica II

Licenciatura em Matemática

6 de Fevereiro de 2007 Duração: 2h30

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Considere o conjunto
$$S = \left\{ a + b\sqrt{5} \ \mid \ a, b \in \mathbb{Q} \right\}.$$
   (a) Prove que S é um subespaço do espaço vectorial $\mathbb{R}$ sobre o corpo $\mathbb{Q}$.
   (b) Determine uma base e a dimensão de S.

2. Para cada uma das seguintes afirmações diga, justificando de forma breve, se é verdadeira ou falsa.
   (a) Sejam F e G subespaços de dimensão 4 de um espaço vectorial de dimensão 7. Então F e G têm pelo menos um vector não nulo em comum.
   (b) Não existe nenhuma transformação linear não nula $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{Im}(T) \subset \mathrm{Ker}(T)$.
   (c) Sejam v_1 e v_2 vectores ortogonais de um espaço vectorial real com produto interno. Então
$$\|2v_1 + 3v_2\|^2 = 4\|v_1\|^2 + 9\|v_2\|^2.$$

3. Seja V um espaço vectorial real com base $\{v_1, v_2\}$. Sejam $R, S, T : V \longrightarrow V$ transformações lineares definidas por:
$$\begin{array}{ccc} T(v_1) = -v_1 & S(v_1) = v_2 & R(v_1) = -v_2 \\ T(v_2) = 2v_1 & S(v_2) = v_1 + v_2 & R(v_2) = 2v_2\,. \end{array}$$
   (a) Diga, justificando, se alguma destas transformações lineares é bijectiva.
   (b) Mostre que $R = S \circ T$.
   (c) Escreva a matriz de T na base $\{v_1, v_2\}$.
   (d) Designando por A a matriz obtida na alínea anterior, construa uma matriz invertível P de tal modo que $P^{-1}AP$ seja a matriz de T relativamente à base $\{v_1, 2v_1 - v_2\}$ de V.

4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.
   (a) Sem efectuar cálculos, indique, justificando, um dos valores próprios de A.
   (b) Determine os restantes valores próprios de A.
   (c) Determine os subespaços próprios de A e calcule uma base de cada um desses subespaços.
   (d) A matriz A será diagonalizável? Se o for, indique uma matriz diagonalizante.

5. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_r$ vectores de um espaço vectorial V.
   (a) Prove que, se $v_1, v_2, \ldots, v_r$ forem linearmente independentes e se $w \in \mathcal{L}(v_1, v_2, \ldots, v_r)$, então w escreve-se de forma única como combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_r$.
   (b) Prove que se $v_1, v_2, \ldots, v_r$ forem linearmente dependentes e $v_1 \neq 0$, então existe $i \in \{2, \ldots, r\}$ tal que v_i é combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}$.