Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Frequência de Álgebra Linear e Geometria Analítica II
Licenciatura em Matemática

12 de Outubro de 2006 Duração: 1h15m

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Considere o seguinte subconjunto de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix} \ : \ a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

   (a) Mostre que W é subespaço de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.
   (b) Determine uma base e indique a dimensão de W.
   (c) Construa uma base de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ que contenha a base obtida na alínea anterior.
   (d) Determine um subespaço U de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $M_{2\times 3}(\mathbb{R}) = U \oplus W$.

2. Para cada uma das seguintes afirmações diga, justificando de forma breve, se é verdadeira ou falsa.

   (a) Seja V um espaço vectorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Então $\alpha\, 0_V = 0_V$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$.
   (b) Sejam S e T subespaços do espaço vectorial V. Então $S \cup T$ é um subespaço de V.
   (c) Seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de um espaço vectorial real V. Então $\{v_1,\, 2v_1 + v_2 + 5v_3,\, v_1 + 2v_3\}$ é também uma base de V.
   (d) Um espaço de dimensão infinita não tem nenhum subespaço de dimensão finita.

3. Seja $\{v_1, \ldots, v_q\}$ um conjunto gerador de um espaço vectorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$. Prove que, se $v_1 \in \mathscr{L}(\{v_2, \ldots, v_q\})$, então o conjunto $\{v_2, \ldots, v_q\}$ também gera V.