Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Frequência de Álgebra Linear e Geometria Analítica II

Licenciatura em Matemática

13 de Novembro de 2006 Duração: 1h15m

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Seja V um espaço vectorial real e $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de V. Seja $T : V \longrightarrow V$ a transformação linear representada, relativamente à base B, pela matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.
   (a) Calcule $T(v_1 - 5v_3)$.
   (b) Determine o núcleo de T.
   (c) T será injectiva? E sobrejectiva?
   (d) Determine os valores próprios da matriz A.
   (e) Determine uma base B' de V relativamente à qual T seja representada por uma matriz diagonal.

2. Para cada uma das seguintes afirmações diga, justificando de forma breve, se é verdadeira ou falsa.
   (a) Dados $v_1, \ldots, v_r$ vectores linearmente independentes de um espaço vectorial V, seja $T : V \longrightarrow V$ uma transformação linear tal que $T(v_1), \ldots, T(v_r)$ são também vectores linearmente independentes. Então T é injectiva.
   (b) Dados os subespaços de $\mathbb{R}^4$

   $$F = \{(a, b, c, 0) : \ a, b, c \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad G = \{(0, 0, d, e) : \ d, e \in \mathbb{R}\},$$

   não existe nenhuma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\mathrm{Ker}(T) = F$ e $\mathrm{Im}(T) = G$.
   (c) Dados os subespaços de $\mathbb{R}^4$

   $$F = \{(a, b, 0, 0) : \ a, b \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad G = \{(0, 0, d, e) : \ d, e \in \mathbb{R}\},$$

   não existe nenhuma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\mathrm{Ker}(T) = F$ e $\mathrm{Im}(T) = G$.
   (d) Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = A$. Se λ for um valor próprio de A, então $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

3. (a) Seja V um espaço vectorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{K}$. Seja $T : V \longrightarrow V$ uma transformação linear satisfazendo $T^2 = T$. Considere o subespaço de V

   $$U = \{v \in V : \ T(v) = v\}.$$

   Suponha que $B = \{v_1, \ldots, v_r\}$ é uma base de U e $B' = \{u_1, \ldots, u_s\}$ é uma base de $\mathrm{Ker}(T)$. Prove que $B \cup B'$ é uma base de V.
   (b) Indique uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, não nula e diferente da identidade, satisfazendo $T^2 = T$.