Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Frequência de Álgebra Linear e Geometria Analítica II

Licenciatura em Matemática

18 de Dezembro de 2006 Duração: 1h15m

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. No espaço $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ considere o produto interno definido por $\langle A, B\rangle = tr(A^T B)$, para quaisquer $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   (a) Determine uma base ortonormada do subespaço vectorial
   $$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ : \ a = b \ \text{ e } \ c = 0 \right\}.$$

   (b) Calcule a projecção ortogonal de $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ sobre V.

2. Para cada uma das seguintes afirmações diga, justificando de forma breve, se é verdadeira ou falsa.

   (a) Seja A uma matriz simétrica real. Então os valores próprios de A são todos reais.

   (b) A figura geométrica, do espaço real $\mathbb{R}^3$, dada pela equação $z^2 + 2xy = 1$ é um hiperbolóide de uma folha.

   (c) Seja V um espaço vectorial real com produto interno e $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Se um vector $v \in V$ for ortogonal a todos os vectores da base B, então $v = 0$.

   (d) Seja f uma função real contínua no intervalo $[a, b]$. Então $[\int_a^b f(t)\, dt]^2 \leq (b - a) \int_a^b f(t)^2 dt$.

3. Seja V um espaço vectorial real de dimensão finita com produto interno. Seja $f : V \to V$ uma aplicação satisfazendo
   $$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle ,$$
   para quaisquer $u, v \in V$. Mostre que f é linear.