Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Álgebra Linear e Geometria Analítica II

Licenciatura em Matemática

14 de Julho de 2008 Duração: 2h30

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Considere o seguinte subconjunto de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \ : \ a-b=c \quad \text{e} \quad d-e=f \right\}.$$

   (a) Mostre que F é subespaço de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

   (b) Determine uma base e indique a dimensão de F.

   (c) Construa uma base de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ que contenha a base de F determinada na alínea anterior.

   (d) Determine um subespaço G de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $M_{2\times 3}(\mathbb{R}) = F \oplus G$.

2. Para cada uma das seguintes afirmações diga, justificando de forma breve, se é verdadeira ou falsa.

   (a) Seja V um espaço vectorial de dimensão n. Então, existe pelo menos um subespaço de V com dimensão $n-1$.

   (b) Seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base ortonormada de um espaço vectorial real, V, com produto interno, $\langle , \rangle$. Então, para qualquer $v \in V$, tem-se $v = \langle v, v_1\rangle v_1 + \cdots + \langle v, v_n\rangle v_n$.

3. Seja V um espaço vectorial real com base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. Seja $T : V \longrightarrow V$ a transformação linear definida por $T(v_1) = v_1 + v_3$, $T(v_2) = v_1 - v_2 + v_3$ e $T(v_3) = -v_2$.

   (a) Escreva a matriz, A, de T na base B.

   (b) Determine o núcleo de T.

   (c) Será T injectiva? E sobrejectiva?

   (d) Considere a base $B' = \{v_1,\ v_1 + v_2,\ v_1 + v_2 + v_3\}$ de V. Construa uma matriz invertível, P, de tal modo que $P^{-1}AP$ seja a matriz de T na base B'.

4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine os valores próprios de A.

   (b) Determine os subespaços próprios de A e calcule uma base de cada um desses subespaços.

   (c) Diga, justificando, se A é ou não diagonalizável.

   (d) Identifique a figura geométrica do espaço dada pela equação $x^2 + 4xz + 5y^2 + 4z^2 = 0$.

5. Sejam V e W espaços vectoriais de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$. Seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V.

   (a) Prove que, se $T : V \longrightarrow W$ for uma transformação linear injectiva, então $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ é um conjunto linearmente independente.

   (b) Prove que, se $T : V \longrightarrow W$ for uma transformação linear sobrejectiva, então $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ é um conjunto gerador de W.

   (c) Suponha agora que $T : V \longrightarrow V$ é uma transformação linear satisfazendo $T \circ T = T$. Mostre que $V = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im(T)}$.