Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Álgebra Linear e Geometria Analítica II

Licenciatura em Matemática

25 de Junho de 2008 Duração: 2h30

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Considere o seguinte subconjunto de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$
$$F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;:\; a-2b=c \quad \text{e} \quad a-b=d \right\}.$$
   (a) Mostre que F é subespaço de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
   (b) Determine uma base e indique a dimensão de F.
   (c) No espaço $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ considere o produto interno definido por $\langle A, B\rangle = tr(A^T B)$, para quaisquer $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
      i. Determine uma base ortogonal de F.
      ii. Calcule a matriz de F mais próxima de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

2. Para cada uma das seguintes afirmações diga, justificando de forma breve, se é verdadeira ou falsa.
   (a) Seja V um espaço vectorial de dimensão n. Se um subespaço F de V tiver dimensão n, então $F = V$.
   (b) Num espaço vectorial de dimensão infinita existem conjuntos finitos de vectores linearmente independentes.

3. Seja V um espaço vectorial real com base $B = \{v_1, v_2\}$. Seja $T : V \longrightarrow V$ a transformação linear representada, relativamente à base B, pela matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.
   (a) Calcule $T(v_1 - 5v_2)$.
   (b) Determine o núcleo de T.
   (c) Será T injectiva? E sobrejectiva?
   (d) Considere a matriz invertível, $P = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Construa uma base B' de V de tal modo que $P^{-1}AP$ seja a matriz de T relativamente à base B'.

4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
   (a) Sem efectuar cálculos, indique, justificando, um dos valores próprios de A.
   (b) Determine os restantes valores próprios de A.
   (c) Determine os subespaços próprios de A e calcule uma base de cada um desses subespaços. Diga, justificando, se A é ou não diagonalizável.
   (d) Identifique a figura geométrica do espaço dada pela equação $2x^2 + 4xz + 2z^2 = 0$.

5. Sejam U e W subespaços vectoriais de um espaço vectorial V tais que $V = U \oplus W$.
   (a) Prove que, se $\{u_1, \ldots, u_r\}$ for uma base de U e $\{w_1, \ldots, w_s\}$ for uma base de W, então $\{u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s\}$ é uma base de V.
   (b) Construa uma aplicação linear $T : V \longrightarrow V$ tal que $\mathrm{Ker}(T) = U$ e $\mathrm{Im}(T) = W$.
   (c) Indique, justificando, uma aplicação linear $S : V \longrightarrow V$, tal que $ST = 0$ e $S + T = id_V$.