Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Frequência de Álgebra Linear e Geometria Analítica II

Licenciatura em Matemática

24 de Abril de 2008 Duração: 2h

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.
   (a) Calcule os valores próprios de A.
   (b) Determine os subespaços próprios de A, indicando bases para eles.
   (c) Justifique a afirmação: "A matriz A é diagonalizável".
   (d) Indique uma matriz ortogonal Q tal que $Q^T A Q$ seja diagonal.
   (e) Identifique a figura geométrica, do plano real $\mathbb{R}^2$, dada pela equação $x^2 + y^2 + 8xy = 1$.

2. Considere o seguinte subconjunto de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \ : \ a + b = c + d = 0 \right\}.$$

   (a) Mostre que W é subespaço de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.
   (b) Determine uma base e indique a dimensão de W.
   (c) Construa uma base de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ que contenha a base obtida na alínea anterior.
   (d) Determine um subespaço U de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $M_{2\times 3}(\mathbb{R}) = U \oplus W$.

3. Para cada uma das seguintes afirmações diga, justificando de forma breve, se é verdadeira ou falsa.
   (a) Num espaço vectorial existe um único elemento neutro para a adição.
   (b) Sejam v_1, v_2, v_3 vectores linearmente independentes de um espaço vectorial V sobre o corpo $\mathbb{K}$. Então os vectores $v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_1 - v_3$ também são linearmente independentes.
   (c) Um espaço vectorial de dimensão infinita pode ter um conjunto gerador com um número finito de elementos.

4. (a) Seja A uma matriz 2×2 com característica 1. Sabendo que existe um vector não nulo v, 2×1, tal que $Av + 5v = 0$, determine o polinómio característico de A.
   (b) Dê um exemplo de uma matriz A nas condições da alínea anterior.